Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Artem Nepechiy
Dr. Philippe Kupper

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 3

Name und Matrikelnummer:

....

....

....

9	10	11	12	$\sum$	Tut.

Aufgabe 9 (Produkt oberer Dreiecksmatrizen) (6 Punkte)

Eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, wenn alle Einträge unterhalb der Hauptdiagonale Null sind, d.h.

$$U = (u_{ij}) \quad \Longrightarrow \quad u_{ij} = 0 \text{ für alle } i > j.$$

Es seien $U, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie, dass das Matrixprodukt UV ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 10 (Matrizen die mit allen anderen Matrizen kommutieren) (6 Punkte)

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beliebig. Zeigen Sie die Äquivalenz

$$\forall\, B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;:\; A\,B = B\,A \iff \exists\, a \in \mathbb{R} \;:\; A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche Gestalt hat A, falls gilt $\forall\, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : A\,B = B\,A$?

Aufgabe 11 (Durchschnitt und Summe von Unterräumen) (6 Punkte)

Es seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Unterräume.

(a) Zeigen Sie, dass sowohl der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ als auch die Summe

$$U_1 + U_2 := \{\, x + y \mid x \in U_1,\ y \in U_2 \,\}$$

Unterräume von $\mathbb{R}^n$ sind.

(b) Zeigen Sie: Ist die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum, dann gilt

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \text{oder} \quad U_2 \subseteq U_1.$$

Aufgabe 12 (Lineare Abhängigkeit eines Spezial-Systems) (6 Punkte)

Es sei $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ein linear unabhängiges System von Vektoren in $\mathbb{R}^n$.
Für Skalare $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$u := c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n.$$

Betrachten Sie das System

$$\mathcal{S}(u) := \{\, u - u_1,\ u - u_2,\ \ldots,\ u - u_n \,\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}(u)$ genau dann linear abhängig ist, wenn

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1.$$

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 21. November 2025,** auf ILIAS abgeben werden.