Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Artem Nepechiy
Dr. Philippe Kupper

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 4

Name und Matrikelnummer:

....

....

....

13	14	15	$\sum$	Tut.

Aufgabe 13 (Struktur von Lösungsräumen) (8 Punkte)

(a) Kann
$$L := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}$$
die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems über den reellen Zahlen sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch
$$f(x) := Ax$$
gegeben ist, wobei A diejenige reelle (2×3)-Matrix ist, die durch
$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A(e_1 + e_2 + e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
eindeutig bestimmt ist. Hierbei ist (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. (Vergleiche dazu die erste Aufgabe auf dem Tutoriumsblatt Nummer 4.)
Bestimmen Sie den Lösungsraum des Systems
$$Ax = 0.$$

Aufgabe 14 (Rang, Bild und Kern) (8 Punkte)

Es sei
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ und den Rang von A.

(b) Bestimmen Sie $\ker(A)$.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = b$, wenn
$$b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
gilt.

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 28. November 2025,** auf ILIAS abgeben werden.

Aufgabe 15 (Dimensionsformel) (8 Punkte)

(a) Es seien U_1, U_2 zwei Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die Dimensionsformel:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Hinweis: Basisergänzungssatz.

(b) Es seien U_1, U_2 zwei verschiedene Unterräume des $\mathbb{R}^n$ mit

$$\dim(U_1) = \dim(U_2) = n - 1.$$

Zeigen Sie: $\dim(U_1 \cap U_2) = n - 2$.

(c) Es seien zwei Unterräume des $\mathbb{R}^5$ gegeben durch

$$U = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}, \qquad W = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0\}.$$

Bestimmen Sie Basen von U, W und $U \cap W$.
Hinweis: Wie viel Rechenaufwand ist wirklich nötig?

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 28. November 2025,** auf ILIAS abgeben werden.