

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 5

Name und Matrikelnummer:

.....
.....
.....

16	17	18	Σ	Tut.

Aufgabe 16 (Obere Dreiecksmatrizen und Homomorphismen)

(8 Punkte)

Es sei die Menge

$$U := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Matrixmultiplikation ausgestattet.

Definiere die Abbildung

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) := d.$$

- (a) Zeigen Sie, dass U eine Gruppe ist.
- (b) Zeigen Sie, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist (wobei auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Multiplikation die Gruppenverknüpfung ist).
- (c) Bestimmen Sie den Kern $\ker(\varphi)$ von φ .
- (d) Bestimmen Sie das Bild $\text{Im}(\varphi)$ von φ .

Aufgabe 17 (Eine Gruppe von Funktionen isomorph zu S_3)

(8 Punkte)

Betrachten Sie die Funktionen

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad f(x) := \frac{1}{x}, \quad g: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad g(x) := \frac{x-1}{x}.$$

Es sei Γ die von f und g erzeugte Untergruppe der Gruppe der bijektiven Funktionen $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass Γ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

Aufgabe 18 (Konjugationsgruppe)

(8 Punkte)

Es sei G eine Gruppe. Für jedes $g \in G$ definiere die Abbildung

$$c_g: G \rightarrow G, \quad c_g(x) := gxg^{-1}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\text{Inn}(G) := \{c_g \mid g \in G\}$$

zusammen mit der Komposition von Abbildungen eine Untergruppe der Automorphismengruppe $\text{Aut}(G)$ von G ist.

Man nennt $\text{Inn}(G)$ Konjugationsgruppe (oder Gruppe der inneren Automorphismen) von G .

(b) Folgern Sie, dass die Abbildung

$$\psi: G \rightarrow \text{Aut}(G), g \mapsto c_g,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Ist obiges ψ im Fall von $G = GL(n, \mathbb{R})$ injektiv?

$GL(n, \mathbb{R})$ ist die Menge $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$ zusammen mit der Matrixmultiplikation. $GL(n, \mathbb{R})$ ist eine Gruppe.

(d) Folgern Sie, dass G abelsch ist, falls $\text{Aut}(G) = \{\text{Id}_G\}$.

Gilt auch die Umkehrung?

(e) Gilt

$$\text{Inn}((\mathbb{Z}, +)) = \text{Aut}((\mathbb{Z}, +))?$$