Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Artem Nepechiy
Dr. Philippe Kupper

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 6

Name und Matrikelnummer:

....

....

....

19	20	21	$\sum$	Tut.

Aufgabe 19 (Boolescher Ring) (8 Punkte)

Es sei $R \neq \{0\}$ ein Ring mit der Eigenschaft

$$a^2 = a \quad \text{für alle } a \in R.$$

Beweisen Sie:

(a) In R gilt $a + a = 0$ für alle $a \in R$.

(b) R ist kommutativ.

(c) Hat R keine Nullteiler[1], so ist R isomorph zum Restklassenring $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 20 (Satz von Lagrange) (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 21 ein Element der Ordnung 3 hat.

Aufgabe 21 (Briefmarkenproblem) (8 Punkte)

Es seien a und b positive ganze Zahlen, die teilerfremd sind.

(a) Zeigen Sie, dass man, bis auf endliche viele, alle natürlichen Zahlen in der Form

$$ma + nb,$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$, schreiben kann.

(b) Welches ist die größte natürliche Zahl, die man nicht in der Form

$$ma + nb,$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$, schreiben kann? Begründen Sie Ihre Antwort.

[1] Ein Element $n \in R \setminus \{0\}$ heißt Nullteiler, falls ein $b \in R \setminus \{0\}$ existiert mit $n \cdot b = 0$.

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 12. Dezember 2025,** auf ILIAS abgeben werden.