Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Artem Nepechiy
Dr. Philippe Kupper

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 7

Name und Matrikelnummer:

....

....

....

22	23	24	$\sum$	Tut.

Aufgabe 22 (Komplexe Zahlen) (8 Punkte)

(a) Betrachten Sie die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 2 - 3i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden Ausdrücke:

$$\bar{z}_j - z_j, \qquad z_j \bar{z}_j, \qquad \frac{1}{z_j}, \qquad z_j - \bar{z}_j, \qquad |z_j| \qquad \text{für } j \in \{1, 2\}, \qquad \frac{z_1}{z_1 + z_2}, \qquad z_1^3 z_2^2.$$

(b) Zeigen Sie für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die folgenden Formeln:

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w},$$
$$\mathrm{Re}(z) = \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}),$$
$$\mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2i}(z - \overline{z}),$$
$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

(c) Bestimmen Sie explizite Werte für $\cos(\frac{2\pi}{5}), \sin(\frac{2\pi}{5})$.
Hinweis: Betrachten Sie die Lösungen der Gleichung $z^5 = 1$ über $\mathbb{C}$.
Im Allgemeinen: Für eine komplexe Zahl z und eine ganze Zahl k nennt man eine komplexe Lösung x von $z^k = x$ eine komplexe k-te Wurzel von z.

(d) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 + 6z - 3 + i(4z + 6) = 0\,.$$

(e) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$(1 + i)^n + (1 - i)^n\,.$$

Aufgabe 23 (Eisensteinzahlen) (8 Punkte)

Es sei

$$\rho_+ \coloneqq e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

die dritte Einheitswurzel. Wir setzen

$$R \coloneqq \{x + y\rho_+ \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Man nennt die Elemente von R Eisensteinzahlen.

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 19. Dezember 2025,** auf ILIAS abgeben werden.

(a) Zeigen Sie, dass R ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.
Hinweis: Rechnen Sie nach, dass $1 + \rho_+ + \rho_+^2 = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $z \in R$ gilt: $|z|^2 \in \mathbb{Z}$.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes multiplikativ invertierbare Element $z \in R$ gilt: $|z| = 1$.

(d) Bestimmen Sie alle multiplikativ invertierbaren Elemente von R und zeichnen Sie alle Eisensteinzahlen z mit $|z| \leq 2$.

Aufgabe 24 (Lineare Gleichungssysteme über $\mathbb{F}_7$ und $\mathbb{C}$) (8 Punkte)

(a) Gegeben seien die Matrix

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und der Vektor} \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $AX = B$ vollständig im Körper $\mathbb{F}_7 \coloneqq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(b) Gegeben seien die Matrix

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1+i & 2 & -i \\ 0 & 1-2i & 3 \\ 2i & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und der Vektor} \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} 3 \\ 4-2i \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $AX = B$ vollständig im Körper $\mathbb{C}$.