Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Artem Nepechiy
Dr. Philippe Kupper

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 8

Name und Matrikelnummer:

....

....

....

25	26	27	$\sum$	Tut.

Aufgabe 25 (Vektorraumstruktur auf $(0, \infty)$) (6 Punkte)

Wir definieren auf $V := (0, \infty)$ die Operation

$$\oplus \colon V \times V \to V, \quad x \oplus y := xy$$

und die Operation

$$\odot \colon \mathbb{Q} \times V \to V, \quad (\lambda, x) \mapsto x^{\lambda}.$$

Zeigen Sie, dass V mit $\oplus$ und $\odot$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 26 (Nilpotenter Endomorphismus) (6 Punkte)

Es sei $F \colon V \to V$ ein Endomorphismus des Vektorraums V und $v \in V$, so dass für eine natürliche Zahl n gilt:

$$F^n(v) \neq 0 \quad \text{und} \quad F^{n+1}(v) = 0.$$

Beweisen Sie, dass dann die Vektoren

$$v,\ F(v),\ \dots,\ F^n(v)$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 27 (Polynome über $\mathbb{K}$) (6 Punkte)

Wir bezeichnen mit $\mathbb{K}[X]$ die Menge aller formalen Linearkombinationen $P = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ mit der Eigenschaft, dass zu einem gegebenen P ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_i = 0$ für alle $i \geq N$. Auf der Menge $\mathbb{K}[X]$ definieren wir eine Addition und eine Skalarmultiplikation durch

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i\right) := \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i, \qquad \lambda \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i\right) := \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda a_i) X^i.$$

Für $P = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ heißt die Zahl $\operatorname{grad}(P) := \max\{\, i \in \mathbb{N}_0 \mid a_i \neq 0 \,\}$ der Grad von P; ferner setzen wir $\operatorname{grad}(0) := -\infty$.

(a) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Mengen $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X] := \{\, P \in \mathbb{K}[X] \mid \operatorname{grad}(P) \leq n \,\}$ $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt $\mathbb{C}[X]$ eine linear unabhängige Menge aus n Elementen.
Hinweis: Der Fundamentalsatz der Algebra könnte hier nützlich sein.

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 9. Januar 2026,** auf ILIAS abgeben werden.

Aufgabe 28 (Fixpunktmengen von Endomorphismen) (6 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für einen Endomorphismus $F\colon V \to V$ ist die Menge der Fixpunkte von F definiert durch

$$\operatorname{Fix} F := \{v \in V \mid F(v) = v\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Fix} F \subset V$ ein Untervektorraum ist.

b) Es sei der Endomorphismus F gegeben durch:

i) $F\colon \mathbb{F}_5^3 \to \mathbb{F}_5^3,\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x,$

ii) $F\colon \mathbb{F}_5[t] \to \mathbb{F}_5[t]$ sei definiert durch: Für $P(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ setze $F(P)(t) := \sum_{k=1}^{m} k\, a_k\, t^{k-1}$.

iii) $F\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ sei definiert durch: Für $P(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ setze $F(P)(t) := \sum_{k=1}^{m} k\, a_k\, t^{k}$.

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\operatorname{Fix} F$.

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 9. Januar 2026,** auf ILIAS abgeben werden.