Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Artem Nepechiy
Dr. Philippe Kupper

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 9

Name und Matrikelnummer:

....

....

....

29	30	31	$\sum$	Tut.

Aufgabe 29 (Darstellungsmatrix) (8 Punkte)

Es seien die folgenden linearen Abbildungen gegeben:

$$L_1 \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 \end{pmatrix},$$

und

$$L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_3 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen auf allen Räumen die Standardbasen.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen A von L_1 und B von L_2.

(b) Bestimmen Sie die Abbildung $L_2 \circ L_1$ und ihre Darstellungsmatrix C durch direkte Rechnung.

(c) Rechnen Sie nach, dass $C = BA$ gilt.

Aufgabe 30 (Matrizen invertieren) (8 Punkte)

(a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{F}_5$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$$

invertierbar? Geben Sie in diesen Fällen die inverse Matrix an.

(b) Bestimmen Sie die Inverse zu

$$\begin{pmatrix} 1-i & 0 & i \\ 2 & 3-i & 2+2i \\ 1+i & 4-i & 2+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Aufgabe 31 (Das Kreuzprodukt) (8 Punkte)

Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das Kreuzprodukt durch

$$x \times y \coloneqq \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 16. Januar 2026,** auf ILIAS abgeben werden.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen

$$\phi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto x \times e_1 \qquad \phi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto x \times e_2 \qquad \phi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto x \times e_3$$

bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3).

(b) Es nun sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{ \vec{o} \}$ beliebig und wir betrachten die lineare Abbildung

$$L_{\vec{v}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x} \times \vec{v}\,.$$

Ist $L_{\vec{v}}$ invertierbar? Begründen Sie.

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 16. Januar 2026,** auf ILIAS abgeben werden.