Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Artem Nepechiy
Dr. Philippe Kupper

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 10

Name und Matrikelnummer:

....

....

....

32	33	34	$\sum$	Tut.

Aufgabe 32 (Darstellungsmatrix von Matrixabbildungen) (8 Punkte)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

zwei (2×2)-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$T\colon \mathbb{K}^{2\times 2} \to \mathbb{K}^{2\times 2}, \qquad M \mapsto AMB.$$

Wir verwenden auf $\mathbb{K}^{2\times 2}$ die Basis

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}), \quad E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$ von T bezüglich $\mathcal{B}$.

Aufgabe 33 (Polynomabbildungen) (8 Punkte)

In allen Teilaufgaben sei $\mathbb{R}_n[x]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$.

(a) Es sei $V = \mathbb{R}_4[x]$ und
$$f\colon V \to \mathbb{R}^4, \qquad f(p) = \big(p(0), p(1), p(2), p(3)\big).$$
Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.

(b) Es sei $V = \mathbb{R}_4[x]$ und
$$g\colon V \to \mathbb{R}^3, \qquad g(p) = \big(p(0), p'(0), p(1)\big).$$
Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(g)$ und $\mathrm{Bild}(g)$.

(c) Es sei $h\colon \mathbb{R}_5[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ durch $h(p) = p''$ gegeben. Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(h)$ und $\mathrm{Bild}(h)$.

Aufgabe 34 (Basiswechsel) (8 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ linear und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 23. Januar 2026,** auf ILIAS abgeben werden.

sei die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{von } \mathbb{R}^3$$

im Definitionsbereich und der kanonischen Basis im Zielbereich, d. h.

$$A = M_{\mathcal{E}_4,\mathcal{B}}(f),$$

wobei $\mathcal{E}_k$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^k$ bezeichnet.
Weiter sei

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \quad \text{eine Basis von } \mathbb{R}^4.$$

(a) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3}(f)$.

(b) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}_3}(f)$.

(c) Es sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

Gibt es Basen $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{C}'$ von $\mathbb{R}^4$ mit

$$M_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(f) = B?$$

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 23. Januar 2026,** auf ILIAS abgeben werden.