Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Artem Nepechiy
Dr. Philippe Kupper

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 11

Name und Matrikelnummer:

....

....

....

35	36	37	$\sum$	Tut.

Aufgabe 35 (Komplement und Quotienten) (8 Punkte)

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2\times 5}.$$

(a) Finden Sie eine Basis für ein Vektorraumkomplement von $\operatorname{Ker}(A)$ in $\mathbb{F}_2^5$.

(b) Geben Sie eine Basis für $\mathbb{F}_2^5 / \operatorname{Ker}(A)$ an.

Aufgabe 36 (Blockdarstellung) (8 Punkte)

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{K}^m$, $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ sowie $\varphi\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ linear mit

- $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{K}^m$ und $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{K}^n$,
- $\varphi(V_1) \subseteq W_1$ und $\varphi(V_2) \subseteq W_2$.

Zeigen Sie, dass geordnete Basen B von $\mathbb{K}^m$ und C von $\mathbb{K}^n$ existieren, sodass

$$M_{\mathsf{C},\mathsf{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,\dim(V_1)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\dim(W_1),1} & \dots & a_{\dim(W_1),\dim(V_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{1,1} & \dots & b_{1,\dim(V_2)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{\dim(W_2),1} & \dots & b_{\dim(W_2),\dim(V_2)} \end{pmatrix}$$

mit $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\dim(W_1)\times\dim(V_1)}$ und $(b_{lk}) \in \mathbb{K}^{\dim(W_2)\times\dim(V_2)}$.

Aufgabe 37 (Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen) (8 Punkte)

(a) Beweisen Sie für endlichdimensionale Vektorräume V und Unterräume $U \leq V$ die Dimensionsformel

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U).$$

(b) Es seien nun

$$M := \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad S := \{K \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid K^T = K\}.$$

Bestimmen Sie $\dim(M/S)$.

(c) Geben Sie eine explizite Basis von M/S an.

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 30. Januar 2026,** auf ILIAS abgeben werden.

(d) Es sei
$$A \coloneqq \{K \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid K^T = -K\} \subset M$$
der Unterraum der schiefsymmetrischen Matrizen.
Zeigen Sie: $M/S \cong A$, konstruieren Sie dazu einen expliziten Vektorraumisopmorphismus.
Hinweis: Die Abbildung $\varphi\colon M \to M, B \mapsto B - B^T$ kann nützlich sein.

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 30. Januar 2026,** auf ILIAS abgeben werden.