Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Artem Nepechiy
Dr. Philippe Kupper

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 12

Name und Matrikelnummer:

....

....

....

38	39	40	$\sum$	Tut.

Aufgabe 38 (Alternierende bilineare Abbildungen in Dimension 2) (8 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = 2$ und

$$\omega\colon V^2 \to \mathbb{K}$$

eine alternierende bilineare Abbildung.

Zeigen Sie: Für alle $u, v, w \in V$ gilt die Identität

$$\omega(u, v)\, w + \omega(v, w)\, u + \omega(w, u)\, v = 0.$$

Aufgabe 39 (Jacobi-Identität für den Matrixkommutator) (8 Punkte)

(a) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den $\mathbb{K}$-Vektorraum

$$V := \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Für $X, Y \in V$ definieren wir

$$[X, Y] := XY - YX.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$[\cdot,\cdot]\colon V \times V \to V$$

$\mathbb{K}$-bilinear ist.

(b) Zeigen Sie, dass $[\cdot,\cdot]$ alternierend ist, d. h.

$$[X, X] = 0 \qquad \text{für alle } X \in V.$$

(c) Zeigen Sie die Jacobi-Identität:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \qquad \text{für alle } X, Y, Z \in V.$$

Aufgabe 40 (Leibnizformel für $n = 3$) (8 Punkte)

(a) Wir betrachten die symmetrische Gruppe $S(3)$. Listen Sie alle $\sigma \in S(3)$ auf (z.B. in Zweizeilenschreibweise). Bestimmen Sie für jedes $\sigma \in S(3)$ das Signum $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 6. Februar 2026,** auf ILIAS abgeben werden.

(b) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}.$$

Rechnen Sie die Leibnizformel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S(3)} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3}$$

explizit mit dem Wissen aus (a) aus.

(c) Wenden Sie die so erhaltene Formel auf die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

an und berechnen Sie $\det(B)$.

(d) Unter der Annahme, dass det in den Spalten alternierend multilinear ist: Lässt sich $\det(B)$ aus Teil (c) ohne Ausmultiplizieren bestimmen? Begründen Sie kurz.