Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Artem Nepechiy
Dr. Philippe Kupper

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 13

Name und Matrikelnummer:

....

....

....

41	42	43	$\sum$	Tut.

Aufgabe 41 (Determinanten und Fibonacci-Zahlen) (8 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen sind durch

$$f_0 := 1,\ f_1 := 1 \text{ und } f_n := f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad \text{für } n \geq 2$$

induktiv definiert. Es sei

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ i & 1 & i & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & i & 1 & i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Bestimmen Sie $\det(F_n)$ für alle $n \geq 1$.

Aufgabe 42 (Determinanten und Variablen) (8 Punkte)

Sei für $n \geq 2$

$$M_n := \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Determinante der Matrix M_n. Was erhält man, wenn man a_{n-1} durch $a_{n-1} + x$ ersetzt.

Aufgabe 43 (Determinantenformeln) (8 Punkte)

Es sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und es gelte

$$a_{i,j} = 0 \qquad \text{für } i + j \geq n + 2,$$

das heißt unterhalb der Nebendiagonalen stehen nur Nullen. Zeigen Sie:

$$\det(A) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} \cdots a_{n,1}.$$

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 13. Februar 2026,** auf ILIAS abgeben werden.