Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Artem Nepechiy
Dr. Philippe Kupper

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 14

Name und Matrikelnummer:

. . . .

. . . .

. . . .

44	45	46	47	$\sum$	Tut.

Aufgabe 44 (Diagonalisieren) (6 Punkte)

Es sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie Basen aller Eigenräume von A.

b) Bestimmen Sie eine geordnete Basis $\mathsf{B} = (b_1, \ldots, b_4)$ von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A und bestimmen Sie die Basiswechselmatrix

$$S := M_{\mathsf{E},\mathsf{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}).$$

c) Rechnen Sie nach, dass $AS = SD$ gilt, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ ist. Dabei sei λ_i jeweils der Eigenwert zum Eigenvektor b_i für $i = 1, \ldots, 4$.

Aufgabe 45 (Nilpotenter Endomorphismus) (6 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus. Wir sagen, dass ϕ nilpotent ist, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\phi^k = 0$ gibt.

Zeigen Sie: Ist ϕ nilpotent, so ist 0 der einzige Eigenwert von ϕ. Ist zudem $\phi \neq 0$, so ist ϕ nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 46 (Pell-Folge) (6 Punkte)

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

a) Bestimmen Sie ein $S \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix D ist.

b) Berechnen Sie A^n für jede natürliche Zahl n. (Warum ist $A^n = SD^nS^{-1}$?)

c) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ und

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Geben Sie eine geschlossene Formel für u_n an.

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 20. Februar 2026,** auf ILIAS abgeben werden.

Hinweis: Man rechne mit den Nullstellen α, β von $\chi_A(X)$ unter Beachtung von Relationen wie $\alpha\beta = -1$ und $\alpha + \beta = 2$, und erst am Schluß setze man die Zahlenwerte von α und β ein.

Aufgabe 47 (Ähnlichkeitsinvarianten) (6 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{C}^{4\times 4}$. Untersuchen Sie, welche dieser Matrizen zueinander ähnlich sind.

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 20. Februar 2026,** auf ILIAS abgeben werden.