# Lineare Algebra I
# für die Fachrichtung Informatik
# Wintersemester 2023/24

Aussage: Ausdruck, von dem eindeutig bestimmt ist, ob er wahr (w) oder falsch (f) ist.

z.B.:

| | | |
|---|---|---|
| „5 ist eine Primzahl" | w | Aussagen |
| „6 ist größer als 7" | f | |
| „0 ist eine natürliche Zahl" | f | |

$\frac{5}{0} > 7$

„A ist größer als B"

"Nachts ist es kälter als draußen"

keine Aussage

Es seien

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Aussagen.

| $\mathcal{A}$ | $\mathcal{B}$ | $\neg \mathcal{A}$ | $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ | $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ | $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | w | w | w |
| w | f | f | f | w | f |
| f | w | w | f | w | w |
| f | f | w | f | f | w |
| | | nicht $\mathcal{A}$ | $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ | $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$ | $\mathcal{A}$ impliziert $\mathcal{B}$<br>wenn $\mathcal{A}$ dann $\mathcal{B}$ |

## Def. 1.1.3: Äquivalenz von Aussagen.

Gegeben seien Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Dann $\boxed{\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}}$ bedeutet gerade $\boxed{(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})}$

---

| $\mathcal{A}$ | $\mathcal{B}$ | $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ | $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ | $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$ |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w |
| w | f | f | w | f |
| f | w | w | f | f |
| f | f | w | w | w |

**Satz 1.1.5** (Elementare logische Umformungen).
*Für beliebige Aussagen $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ sind die folgenden Aussagen stets wahr:*

*(i)* $(\neg(\neg\mathscr{A})) \iff \mathscr{A}$. (doppelte Negation)

*(ii)* $\mathscr{A} \vee (\neg\mathscr{A})$. (Tertium non datur.)

*(iii)* $\neg(\mathscr{A} \implies \mathscr{B}) \iff (\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B})$ (Negation einer Implikation)

*(iv)* $(\mathscr{A} \implies \mathscr{B}) \iff ((\neg\mathscr{B}) \implies (\neg\mathscr{A}))$. (Kontrapositionsprinzip)

*(v)* $((\mathscr{A} \implies \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{B} \implies \mathscr{C})) \implies (\mathscr{A} \implies \mathscr{C})$. (Transitivität der Implikation)

*(vi)* $((\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \wedge \mathscr{C}) \iff (\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}))$
$((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \vee \mathscr{C}) \iff (\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}))$. (Assoziativität von $\wedge$ und $\vee$)

*(vii)* $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \iff (\mathscr{B} \wedge \mathscr{A})$
$(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \iff (\mathscr{B} \vee \mathscr{A})$. (Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$)

*(viii)* $\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}) \iff (\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \vee (\mathscr{A} \wedge \mathscr{C})$
$\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}) \iff (\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{A} \vee \mathscr{C})$. (Distributivität)

*(ix)* $(\neg(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})) \iff ((\neg\mathscr{A}) \vee (\neg\mathscr{B}))$
$(\neg(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})) \iff ((\neg\mathscr{A}) \wedge (\neg\mathscr{B}))$. (De Morgansche[1] Regeln )

$(2+3)+4 = 2+(3+4)$

$2+3+4$

$1+7 = 7+1$

$3 \cdot (4+7) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 7$

$\cancel{3+(4 \cdot 7) = (3+4) \cdot (3 \cdot 7)}$

$\neg \quad \cdot \quad \cup$

Bw: (i): z.z: $\neg(\neg A) \iff A$

| $A$ | $\neg A$ | $\neg(\neg A)$ | $\neg(\neg A) \iff A$ |
|---|---|---|---|
| w | f | w | w |
| f | w | f | w |

(iii) z.z: $\left(\neg(A \Rightarrow B)\right) \iff (A \wedge \neg B)$

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg(A \Rightarrow B)$ | $\neg B$ | $A \wedge \neg B$ | $\left(\neg(A \Rightarrow B)\right) \iff (A \wedge \neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | f | f | f | w |
| w | f | f | w | w | w | w |
| f | w | w | f | f | f | w |
| f | f | w | f | w | f | w |

(v)

z.z: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \Rightarrow B$ | $B \Rightarrow C$ | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ | $A \Rightarrow C$ | $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w | w | w | w |
| w | w | f | w | f | f | f | w |
| w | f | w | f | w | f | w | w |
| w | f | f | f | w | f | f | w |
| f | w | w | w | w | w | w | w |
| f | w | f | w | f | f | w | w |
| f | f | w | w | w | w | w | w |
| f | f | f | w | w | w | w | w |

Später:

Um eine Aussage $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ zu beweisen, geht man folgendermaßen vor:

- Man beweist $\mathcal{A}$,
- Dann beweist man $\mathcal{B}$

(oder umgekehrt).

Um eine Aussage $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ zu beweisen, geht man folgendermaßen vor:

- Man beweist entweder $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$

Um eine Aussage $\boxed{A \Longrightarrow B}$ zu beweisen, geht man folgendermaßen vor:

- Man nimmt an, $A$ ist wahr.
- Man beweist $B$ und darf dabei $A$ verwenden.

Weil $\boxed{A \Longleftrightarrow B}$ ja eingeführt als $\boxed{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}$, beweist man das mit zwei Implikationen

Um eine Aussage $\boxed{\neg A}$ zu beweisen, geht man folgendermaßen vor:

- Man nimmt an, $A$ ist wahr.
- Man konstruiert einen Widerspruch.

Aus einer falschen Aussage kann man etwas falsches folgern.

$$\boxed{f \Rightarrow f}$$

Aus einer falschen Aussage kann man etwas richtiges folgern.

$$\boxed{f \Rightarrow w}$$

---

① $1 + 2 = 7 \quad | -2$

② $1 = 7 - 2 \quad |$ einsetzen in ①

$\Rightarrow \quad 7 - 2 + 2 = 7.$

$7 = 7$

z.z: $A = B$

$A = B$

$\Leftrightarrow \quad A = \dots$

$\Leftrightarrow$

$\vdots$

$\Leftrightarrow$

$\vdots$

$1 = 1$.

$A = \dots$

$= \dots$

$= \dots$

$= \dots$

$= B$.