Lineare Algebra I
für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 2023/24

3 ist eine Primzahl — w

8 ist eine Primzahl — f

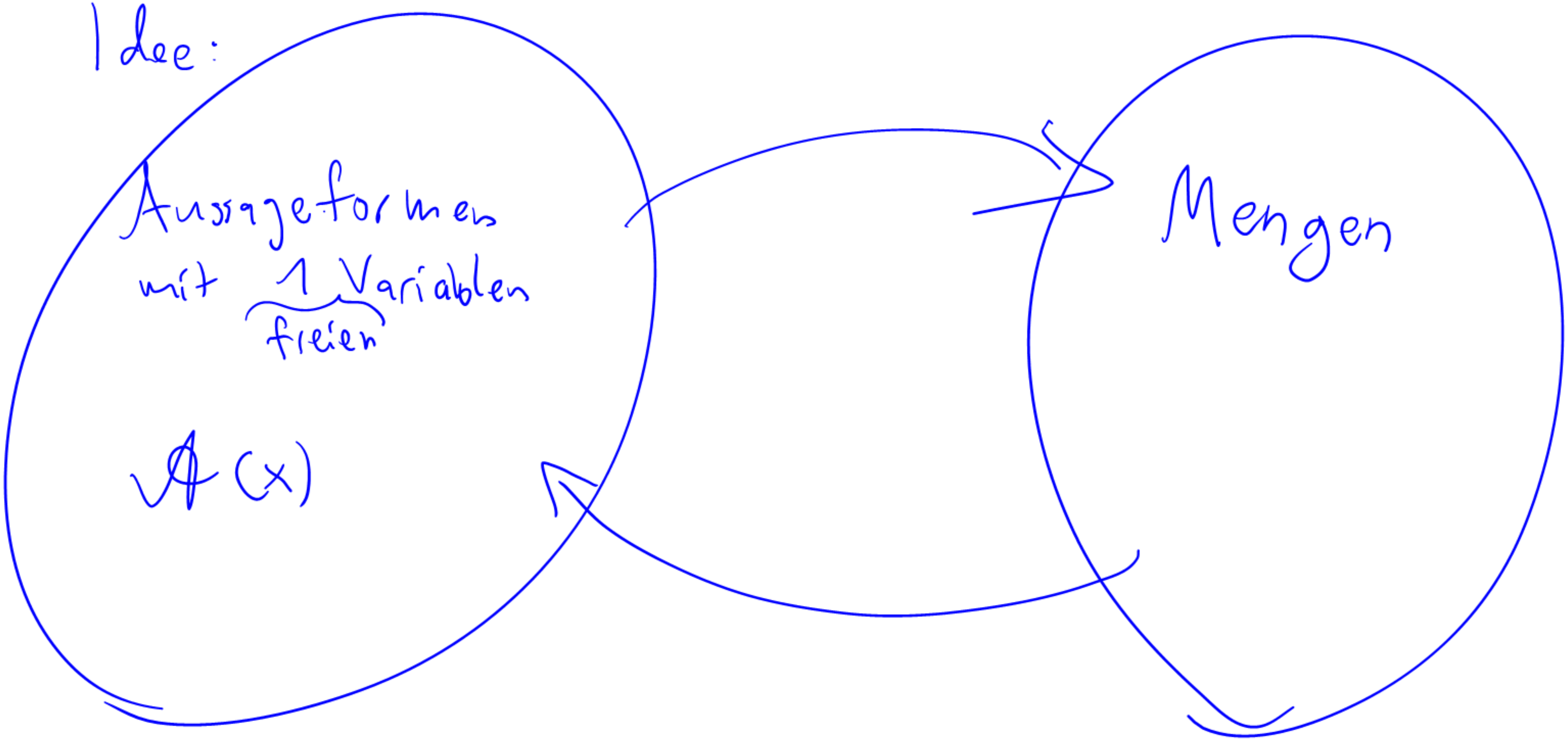
$\Big\}$ Aussage

x ist eine Primzahl ← Aussageform

$x < y$ ← Aussageform

$x < 9$ ← Aussageform

Idee:



<u>Def: (Cantor):</u>

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.

$x = 3$

$\{3\} \neq 3$

$\{\{3\}\} \neq \{3\}$

$\{0, 8, 15\}$

{Hund, Katze, Maus, Telefon}

$\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

$\cancel{\{2, 4, 9, 13, 27, 42, 105, \ldots\}}$

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} =: \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Für Aussageform $\mathcal{A}(x)$ ist $\{x \mid \mathcal{A}(x)\} = \{x : \mathcal{A}(x)\}$

$P = \{ x \mid x$ ist eine Primzahlen$\}$.

<u>Notation:</u> $x \in A$ bedeutet x ist Element von A

$x \notin A$ bedeutet $\neg (x \in A)$.

Für A Menge ist $\boxed{x \in A}$ eine Aussageform.

„Russelsche Nichtmenge"

$R = \{ X \mid x$ ist Menge und $x \notin X \}$ existiert nicht!

z.B.: $\emptyset = \{\}$ $\quad \emptyset \notin \emptyset \implies \emptyset \in R$.

Frage: Gilt: $R \in R$?

1. Fall: $R \in R$

$\Rightarrow$ R ist Menge und $R \notin R$.

↯.

2. Fall: $R \notin R$

$\Rightarrow$ Die Aussage $\boxed{R \in R}$ ist falsch.

$\Rightarrow$ Die Aussage $\boxed{R \notin R}$ ist falsch

$\implies R \in R$. ↯

Def: Die leere Menge

$$\emptyset = \{\}$$

ist die Menge ohne Elemente

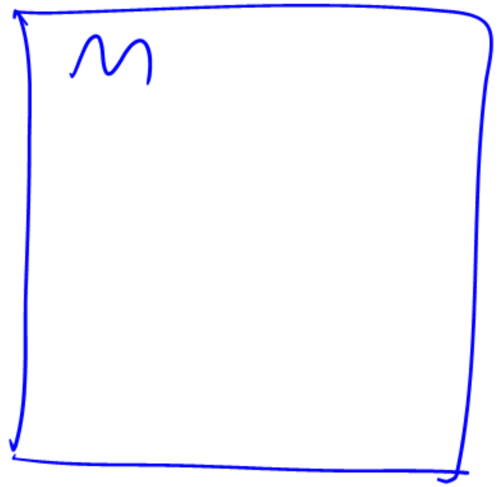
$$\{x \mid f\} = \{x \mid x \neq x\}$$

Wenn M Menge gegeben ist
und $\mathcal{A}(x)$ eine Aussageform ist,

dann ist

$$\{x \mid x \in M \wedge \mathcal{A}(x)\}$$

$$= \{x \in M \mid \mathcal{A}(x)\}$$ immer eine Menge.



Def: Gleichheit von Mengen

$A = B$, wenn jedes Element aus A in B liegt und jedes Element aus B in A ist.

---

z.B.: $A = \{0, 8, 15\}$ $B = \{8, 15, 8, 0\}$.

$$A = B.$$

Quantoren:

$\forall$ — für alle

$\exists$ — es existiert (mindestens 1)

Wenn $\mathcal{A}(x)$ eine Aussageform ist, (und M eine Menge)
dann ist

$\boxed{\forall x : \mathcal{A}(x)}$ eine Aussage
„Für alle x gilt:"

$\forall x \in M : \mathcal{A}(x)$

$\boxed{\exists x : \mathcal{A}(x)}$ eine Aussage
„Es gibt ein x mit"

$\boxed{\exists x \in M : \mathcal{A}(x)}$

---

x ist eine Primzahl

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$x + 2 = x + 3$

$\forall x \in \mathbb{N}$: x ist eine Primzahl f

$\exists x \in \mathbb{N}$: x ist eine Primzahl w

$\forall x \in \mathbb{N}: (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ w

$\exists x \in \mathbb{N}: (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ w

$\forall x \in \mathbb{N}: x+2 = x+3$ f

$\exists x \in \mathbb{N}: x+2 = x+3$ f

Analogie: $\forall x \in \mathbb{N}$: x ist prim

$\Longleftrightarrow$ (1 ist prim) $\wedge$ (2 ist prim) $\wedge$ (3 ist prim) $\wedge$ ...

$\exists x \in \mathbb{N}$: x ist prim

$\Longleftrightarrow$ (1 ist prim) $\vee$ (2 ist prim) $\vee$ (3 ist prim) $\vee$ ...

$$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{A}) \vee (\neg\mathcal{B})$$
$$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B})$$

Bem. 1.2.9 (De Morgan für Quantoren)

$$\neg\left(\forall x : \mathcal{A}(x)\right) \iff \left(\exists x : (\neg \mathcal{A}(x))\right)$$
$$\neg\left(\exists x : \mathcal{A}(x)\right) \iff \left(\forall x : \neg \mathcal{A}(x)\right)$$

Analog: $\neg\left(\forall x \in M : \mathcal{A}(x)\right) \iff \exists x \in M : \neg \mathcal{A}(x)$

Rechenregel:

$$\left(\exists x : \mathcal{A}(x) \vee \exists x : \mathcal{B}(x)\right)$$
$$\iff \left(\exists x : (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x))\right)$$

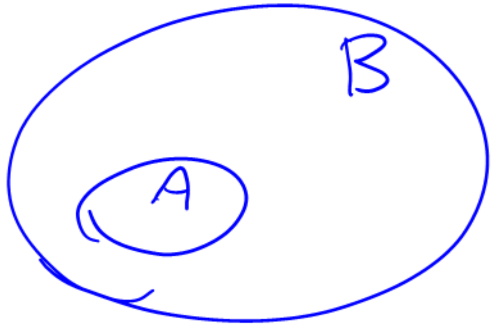
$$\left(\forall x : \mathcal{A}(x) \wedge \forall x : \mathcal{B}(x)\right)$$
$$\iff \left(\forall x : (\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x))\right)$$

Def: Teilmenge

$$A \subseteq B \iff \forall x: \; x \in A \Rightarrow x \in B$$

Notation:

$$A \subsetneq B \iff A \subseteq B \text{ und } A \neq B$$



Notation ~~$A \subset B$~~

Wiederholung:

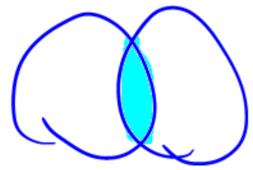
$$A = B \iff A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A$$

$$\iff \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x: (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

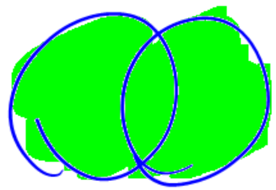
$$\iff \forall x: (x \in A \iff x \in B)$$

Def: M, N Mengen

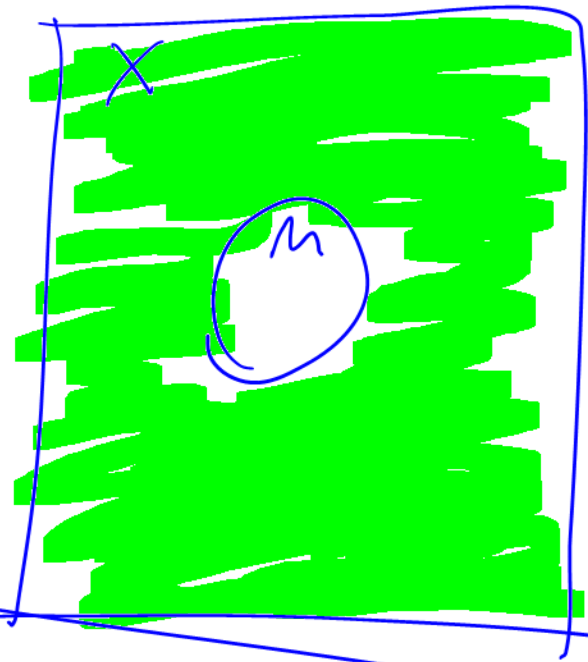
$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$$



$$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$$

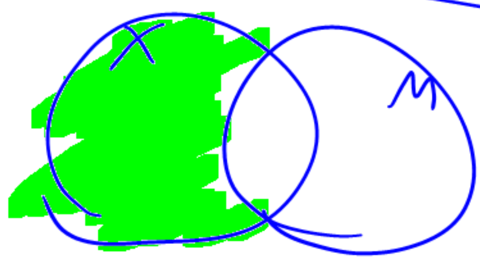


$$X \setminus M = \{x \in X \mid \neg (x \in M)\}$$
$$= \{x \mid x \in X \wedge x \notin M\}$$



X, M Mengen

$$X \setminus M = \{x \in X \mid x \notin M\}$$



Satz 1.2.16 (Elementare Rechenregeln für Mengen).

Gegeben seien Mengen X, A, B, C mit $A, B, C \subseteq X$. Dann gilt:

(i) $X \setminus (X \setminus A) = A$. (doppelte Negation)

(ii) $A \cup (X \setminus A)) = X$. (Tertium non datur.)

(iii) $\neg(A \subseteq B) \iff (\exists x : x \in A \wedge x \notin B)$. (Negation der Teilmengenrelation)

(iv) $(A \subseteq B) \iff (X \setminus B \subseteq X \setminus A)$. (Kontrapositionsprinzip)

(v) $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Longrightarrow (A \subseteq C)$. (Transitivität der Teilmengenrelation)

(vi) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. (Assoziativität von $\cap$ und $\cup$)

(vii) $A \cap B = B \cap A$,
$A \cup B = B \cup A$. (Kommutativität von $\cap$ und $\cup$)

(viii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. (Distributivität)

(ix) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$,
$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$. (de Morgansche Regeln)

(v) z.z: $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C)$.

1. Möglichkeit:

Wir nehmen an:

$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C))$.

z.z.: $A \subseteq C$.

$\Leftrightarrow \forall x: x \in A \Rightarrow x \in C$.

Sei x gegeben.

Annahme: $x \in A$

z.z: $x \in C$.

Aus $A \subseteq B$ folgt:

$x \in B$.

Aus $B \subseteq C$ folgt: $x \in C$.

$\square$

2. Möglichkeit:

$$\left((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \right) \Rightarrow (A \subseteq C).$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\forall x : \underbrace{\boxed{x \in A}}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \underbrace{\boxed{x \in B}}_{\mathcal{B}} \right) \wedge \left(\forall x : \underbrace{\boxed{x \in B}}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \underbrace{\boxed{x \in C}}_{\mathcal{C}} \right) \right) \Rightarrow \left(\forall x : \underbrace{x \in A}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \underbrace{x \in C}_{\mathcal{C}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C) \right) \Rightarrow \left(\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C \right)$$

Wir nehmen an:

$$\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C) \qquad (\text{z.z.: } \forall x : x \in A \Rightarrow x \in C)$$

Sei x gegeben. z.z.: $(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$.

Satz 1.1.5 (v) angewandt auf

$\mathcal{A}$: $(x \in A)$

$\mathcal{B}$: $(x \in B)$

$\mathcal{C}$: $(x \in C)$

Beweis von (iii) z.z.: $\neg(A \subseteq B) \iff \exists x: (x \in A \wedge x \notin B)$

$$\boxed{\neg(A \subseteq B) \iff \exists x: (x \in A \wedge x \notin B)}$$

$$\iff \boxed{\neg\left(\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B\right) \iff \exists x: (x \in A \wedge x \notin B)}$$

Beweis: $\neg\left(\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B\right)$

$$\iff \exists x: \left(\neg\left(x \in A \Rightarrow x \in B\right)\right)$$

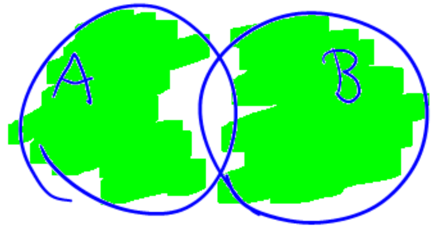
1.1.5 iii

$$\iff \exists x: \left(x \in A \wedge x \notin B\right) \quad \square.$$

Aussagen	Mengen
$\wedge$	$\cap$
$\vee$	$\cup$
$\Rightarrow$	$\subseteq$
$\Leftrightarrow$	$=$
$\neg$	?
$A \wedge (\neg B)$	$A \setminus B$

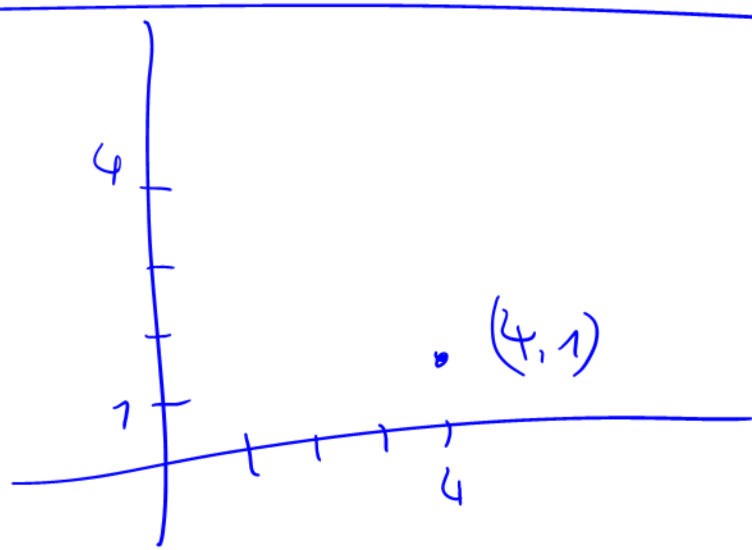
$$A \triangle B$$

$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Symm. Differenz

$$\{2,3\} = \{3,2\}$$



(Geordnetes) Paar

$$(a,b)$$

ist nicht das gleiche wie $\{a,b\}$

$$(4,1) \neq (1,4).$$

$$(a,b) = (x,y)$$

$$:\Longleftrightarrow \left(a = x \wedge b = y\right)$$

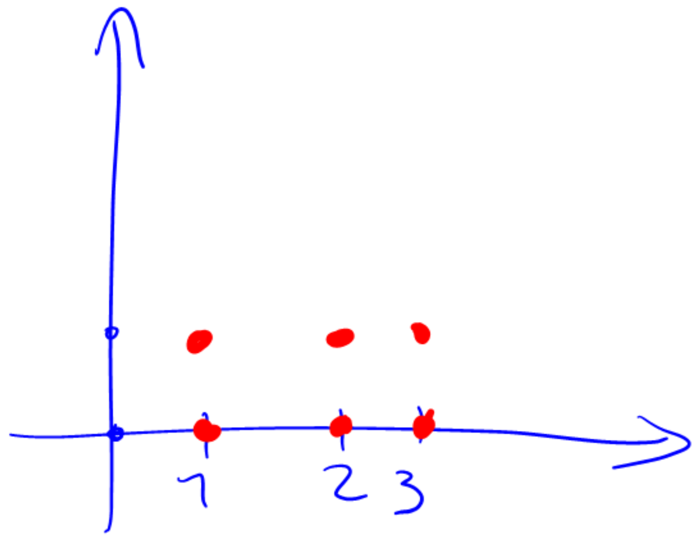
Kartesisches Produkt:

$$A \times B := \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

z.B.: $A = \{1,2,3\}$

$B = \{0,1\}$

$$\{(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$$



Wenn A m Elemente hat, $m \in \mathbb{N}_0$
und B n Elemente hat $n \in \mathbb{N}_0$

dann hat $A \times B$ genau $m \cdot n$ Elemente.

<u>Notation:</u> $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$= \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \}$