Karlsruher Institut für Technologie

Lineare Algebra I
für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 2023/24

Algebra

Lösung von Gleichungen/ Gleichungssystemen

Studium von algebraischen Strukturen, z.B. Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume, ~~Moduln~~, ...

Karlsruher Institut für Technologie

Lineare Algebra I
für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra

Lösung von linearen Gleichungen / Gleichungssystemen

Studium von algebraischen Strukturen, z.B. Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume, ~~Moduln~~, ...

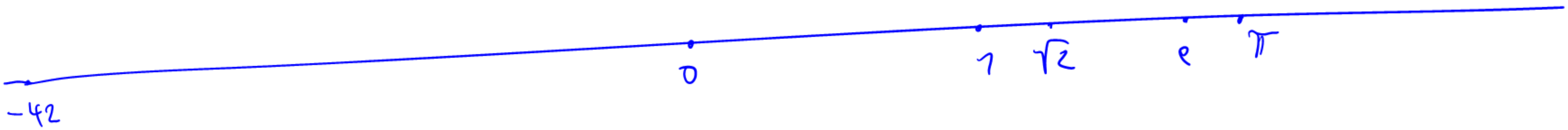
$\mathbb{R}$ = Menge der Reellen Zahlen

$x, y \in \mathbb{R}$ $\qquad x + y \in \mathbb{R}$

$x \cdot y \in \mathbb{R}$

$x - y \in \mathbb{R}$

$y \neq 0$ $\qquad \frac{x}{y} \in \mathbb{R}$



Notation:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \dots + a_n$$

$$\sum_{\gamma=1}^{n} a_\gamma = a_1 + \dots + a_n$$

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

Beispiel 2.1.1: Geg: $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{ax = b}$$

Suche: Lösungsmenge $\{ x \in \mathbb{R} \mid ax = b \}$

1. Fall: $a \neq 0$:

$$ax = b \quad \Big| \cdot \frac{1}{a}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x = \frac{b}{a}}$$

Lösungsmenge $= \left\{ \frac{b}{a} \right\}$

genau eine Lösung.

2. Fall $a = 0$:

$$0x = b$$

$$0 = b$$

Fall 2.1: $b = 0$:

$$0 = 0$$

Lösungsmenge $= \mathbb{R}$

∞ viele Lösungen

Fall 2.2: $b \neq 0$

$$0 = b$$

Lösungsmenge $= \emptyset$

keine Lösung.

Beispiele für nicht-lineare Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} x^5 - 16x + 2 = 0 \\ \cos x = x \\ e^x + x = 42 \end{array}\right\} \text{nicht elementar lösbar}$$

Def:

Eine lineare Gleichung in n Variablen ist eine Aussageform, die wie folgt aussieht:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$$

mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gegeben, $b \in \mathbb{R}$

rechte Seite

Koeffizienten

Eine Lösung dieser Gleichung ist ein Spaltenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$.

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \forall j \in \{1, \dots, n\} : x_j \in \mathbb{R} \right\}$$

Menge der Spaltenvektoren

Beispiel: $5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7$

z.B.: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Lösung.

$$x_1 = \frac{7 + 3x_2 - 2x_3}{5}$$

$$x_1 = \frac{7}{5} + \frac{3}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3$$

$s = x_2 \qquad t = x_3 \qquad$ frei wählbar.

$$x_1 = \frac{7}{5} + \frac{3}{5}s - \frac{2}{5}t$$

$$\text{Lösungsmenge} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{5} + \frac{3}{5}s - \frac{2}{5}t \\ s \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

Def 2.1.3: Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) mit $\mathbb{R}$-Koeffizienten ist gegeben durch eine Familie aus $m \in \mathbb{N}$ linearen Gleichungen, jede in $n \in \mathbb{N}$ Unbekannten.

Wir notieren:

$$\begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + \dots + a_{2,n} x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1} x_1 + \dots + a_{m,n} x_n = b_m \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j = b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} x_j = b_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j} x_j = b_m \end{array}$$

Eine Lösung des LGS ist ein Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, der gleichzeitig jede einzelne Gleichung löst.

Ein LGS heißt homogen, wenn rechte Seite Null ist, d.h.

$\forall j \in \{1, .., m\} \quad b_j = 0$.

Sonst: inhomogen.

Matrizenrechnung

Geg. $m, n \in \mathbb{N}$.

Eine $(m \times n)$-Matrix mit reellen Einträgen:

$$\underset{m \text{ Zeilen}}{A =} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}}$$

$$\mathbb{R}^{m \times n} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \end{matrix} : a_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}$$

$n=1$

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \;\middle|\; \forall i:\ a_i \in \mathbb{R} \right\}$$ Spaltenvektor

$m=1$

$$\mathbb{R}^{1\times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \forall i:\ a_i \in \mathbb{R} \right\}$$ Zeilenvektor

$m=1$

$n=1$

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{1\times 1} = \{ a \mid a \in \mathbb{R} \}$$ reelle Zahl

Def 2.2.2: (Transponierte)

Für eine $(m \times n)$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

nennen wir die Matrix

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

die Transponierte von A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{m \times n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n \times m} \\ A & \longmapsto & A^T \end{array} \right) \text{ bijektiv.}$$

z.B.: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{nicht def.}$$

$$3 \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Def. 2.2.3 (Addition und Skalierung von Matrizen)

$$A = m\updownarrow\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{n} \qquad B = m\updownarrow\underbrace{\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}}_{n}$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$A+B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A+B := \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$A = m\updownarrow\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$(\lambda A)_{i,j} = \lambda A_{i,j}.$$

$$+ : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$$
$$(A, B) \longmapsto A+B$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$$
$$(\lambda, A) \longmapsto \lambda A$$

Def: 2.2.6 (Nullmatrix)

$m, n \in \mathbb{N}$

$$0 = 0_{m \times n} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \\ \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + 0 = A$$

Def: 2.2.11 (Einheitsmatrix)

$n \in \mathbb{N}$

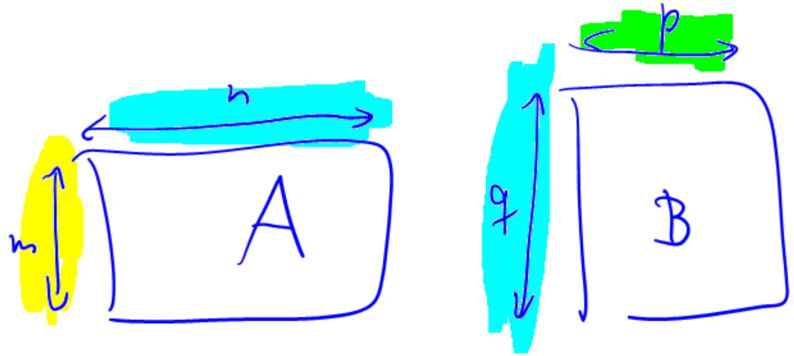
$$\mathbb{1}_n := \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{1}_1 = (1) = 1$$

Matrixmultiplikation

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad$ $B \in \mathbb{R}^{q\times p}$



A und B **multiplizierbar** (kompatibel), wenn

$$n = q.$$

In diesem Fall definieren wir

$$A \cdot B = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$\underbrace{(m\times n)\quad(n\times p)}_{m\times p}$$

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 23 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3 \times 2) \qquad\qquad (2 \times 4)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 38 & 6 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 118 & 12 & 69 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3 \times 4$$

$$\begin{array}{cc|cccc} & & 42 & 0 & 23 & 0 \\ & & -2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 3 & 4 & & & & \end{array}$$

$B \cdot A$ ist nicht definiert!

$$(2 \times 4) \quad (3 \times 2)$$

$$4 \neq 3$$

Def 2.1.3: Ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit $\mathbb{R}$-Koeffizienten gegeben durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und einen Spaltenvektor $b \in \mathbb{R}^m$ ist eine Aussageform der Art:

$$Ax = b$$

$$(m\times n)\quad (n\times 1)\quad (m\times 1)$$

Eine Lösung des LGS ist ein Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = b$$

z.B.:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 \end{array} \right.$$

Lemma 2.2.7

Gegeben $m, n \in \mathbb{N}$,

$A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$

Dann gilt:

(i) $(A+B)+C = A+(B+C)$ ← Assoziativität der Matrixaddition

(ii) $A + 0 = A = 0 + A$

(iii) $A + (-1)A = (-1)A + A = 0$

Kommutativität der Matrixaddition

(iv) $A+B = B+A$

(v) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

(vi) $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

(vii) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$

(viii) $1 A = A$

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$+ : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$

Beweis: (i) z.z: $(A+B)+C = A+(B+C)$

Beide Seiten sind $(m \times n)$-Matrizen.

Geg: $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$

$$\big((A+B)+C\big)_{i,j} = (A+B)_{i,j} + C_{i,j}$$

$$= (A_{i,j} + B_{i,j}) + C_{i,j}$$

$$= A_{i,j} + (B_{i,j} + C_{i,j})$$

$$= A_{i,j} + (B+C)_{i,j} = \big(A + (B+C)\big)_{i,j}.$$

Hier nutzen wir, dass Addition von reellen Zahlen assoziativ ist.

Lemma 2.2.12:

(i) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$; $C \in \mathbb{R}^{p \times r}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(AB)C = A(BC)$$

Assoziativität des Matrixproduktes

(ii) $$\mathbb{1}_m A = A \mathbb{1}_n = A$$

(iii) $$(A_1 + A_2)B = A_1 B + A_2 B$$

(iv) $$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$$

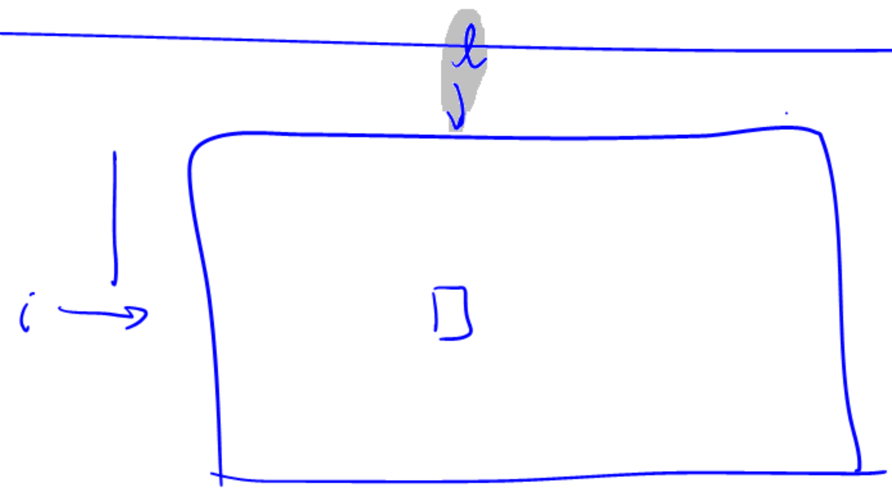
Distributivgesetze

(v) $$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

Bw: (i) $\quad$ z.z. $(AB)C = A(BC)$.

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ B \in \mathbb{R}^{n\times p} \\ C \in \mathbb{R}^{p\times r} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow AB \in \mathbb{R}^{m\times p} \qquad (AB)C \in \mathbb{R}^{m\times r} \\ \Rightarrow BC \in \mathbb{R}^{n\times r} \qquad A(BC) \in \mathbb{R}^{m\times r}. \end{array}$$

$i \in \{1,\dots,m\}$ $\quad$ $\ell \in \{1,\dots,r\}$



$$\big(A(BC)\big)_{i,\ell} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,(BC)_{j\ell}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \sum_{k=1}^{p} B_{jk} \, C_{kl}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} A_{ij} \left(B_{jk} \, C_{kl} \right).$$

$$\left((AB)C \right)_{i,l} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{i,k} \, C_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} \right) C_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \left(A_{ij} B_{jk} \right) C_{kl}$$

Hier haben wir die beiden Summen vertauscht.

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \left(A_{ij} B_{jk} \right) C_{kl}$$

Hier nutzen wir aus, dass Multiplikation von reellen Zahlen assoziativ ist.

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} A_{ij} \left(B_{jk} \, C_{kl} \right).$$

(ii)

$$\underbrace{\underset{m\times m}{\mathbb{1}_m}\ \underset{m\times n}{A}}_{m\times n}$$

$$\mathbb{1}_m = i \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Der Eintrag (i,j) ist

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\mathbb{1}_m A)_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{(\mathbb{1}_m)_{ij}}_{\delta_{ij}} A_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} A_{jk}$$

$$= \delta_{i1} A_{1k} + \delta_{i2} A_{2k} + \dots + \delta_{im} A_{mk}$$

$$= A_{ik}.$$

Anmerkung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Also: Matrixmultiplikation

ist

NICHT

kommutativ!