Lineare Algebra I für die Fachrichtung Informatik Wintersemester 2023/24

$$+ : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$\cdot : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{n\times p} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times p}$$

$$\mathbb{R}^{n} \cong \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{m\times n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n\times m} \\ A & \longmapsto & A^{T} \end{array} \right)$$

Anmerkung: $3+4$
- Addition von reellen Zahlen
- Addition von (1×1)-Matrizen

$3\cdot 4$
- Multiplikation von reellen Zahlen
- Skalierung der (1×1)-Matrix (4) mit Skalar 3
- Matrixprodukt von (1×1)-Matrizen

$3\cdot(1 \;\; 2 \;\; 3)$
- Skalierung der (1×3)-Matrix
- Matrixprodukt von (1×1) und (1×3)-Matrix.

Ein LGS ist gegeben durch

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; b \in \mathbb{R}^m$$

m = Anzahl Gleichungen

n = Anzahl Variablen

Lösungsmenge $\subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$

Heute: Homogene LGS $\quad b = 0$.

z. B.:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ 12 & -13 & 0 & 0 & 2 \\ 10 & -10 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\} \neq \emptyset$, weil $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung ist.

$A0 = 0$ ✓

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad Ax = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ 12 & -13 & 0 & 0 & 2 \\ 10 & -10 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Ay = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x+y=\begin{pmatrix}3\\4\\1\\-2\\8\end{pmatrix}$$

$$A(x+y)=\underbrace{Ax}_{=0}+\underbrace{Ay}_{=0}=0.$$

$$\begin{pmatrix}100\\200\\0\\-300\\700\end{pmatrix}=100x$$

$$A(100x)=100\underbrace{Ax}_{=0}=100\cdot 0=0.$$

$$x-y=x+(-1)y$$

$m, n \in \mathbb{N}$

<u>Def:</u> $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

der Kern von A.

Lösungsmenge eines homog. LGS.

$$\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x \longmapsto Ax \end{pmatrix}$$

$$\ker A = \varphi^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0\}$$

„Nullstellenmenge von φ".

Def. 2.3.1 $n \in \mathbb{N}$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Untervektorraum (UVR) o. linearer Unterraum, wenn

(i) $0 \in U$

(ii) $\forall v, w \in U: v + w \in U$

(iii) $\forall v \in U \; \forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda v \in U$

Lemma 2.3.2 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Ker A ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

Bw: $A0 = 0$ ✓

$A(v+w) = Av + Aw = 0 + 0 = 0$

(La. 2.2.12)

$A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda 0 = 0$

Einschub:

$$\sum_{j=1}^{0} x_j = \text{leere Summe} := 0.$$

$$\prod_{j=1}^{0} x_j = \text{leeres Produkt} := 1.$$

$$0! = 1 \qquad 2^0 = 1$$

Def 2.3.3 $n \in \mathbb{N}$ $r \in \mathbb{N}_0$

(a) $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j$$

nennt man Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$.

(b) $M \subseteq \mathbb{R}^n$

Die lineare Hülle von M ist geg:

$$LH(M) = LH_{\mathbb{R}}(M) := \left\{ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j \;\middle|\; \begin{array}{l} r \in \mathbb{N}, \\ \forall j \quad \lambda_j \in \mathbb{R} \\ \quad\;\; v_j \in M \end{array} \right\}$$

(c) Wenn $M = \{v_1, \dots, v_r\}$

$$LH(v_1, \dots, v_r) = LH(\{v_1, \dots, v_r\})$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j \;\middle|\; \lambda_j \in \mathbb{R} \right\}$$

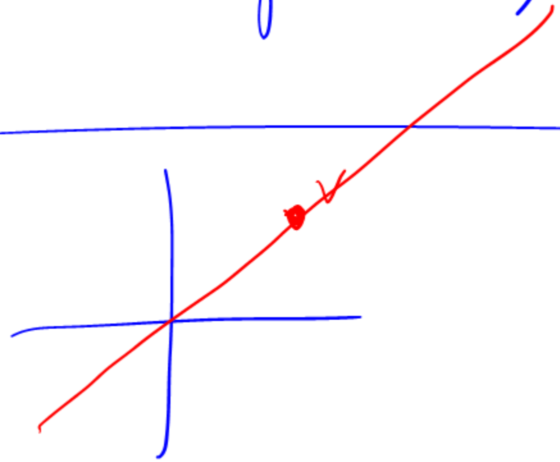
Schreibweisen: $\langle M \rangle$

$\text{span}(M)$

Schreibweise für lin. Hülle.

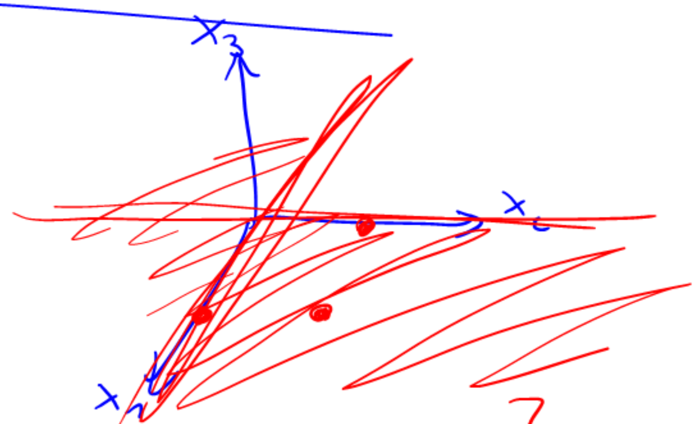
---

z.B.: $\mathbb{R}^2$



$LH(\{v\})$

$\mathbb{R}^3$



$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$LH(M) = x_1 x_2$-Ebene

Lemma 2.3.4 $\quad M \subseteq \mathbb{R}^n \qquad n \in \mathbb{N}$.

(a) $LH(M)$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^n$ mit $M \subseteq LH(M)$.

(b) Jeder UVR U von $\mathbb{R}^n$ mit $M \subseteq U$ enthält $LH(M)$ als Teilmenge

$$\boxed{\forall U \subseteq \mathbb{R}^n: \; U \text{ UVR} \wedge M \subseteq U \Longrightarrow LH(M) \subseteq U.}$$

Bw: (a) (i) $\quad$ z.z.: $0 \in LH(M)$

$0 \in LH(M)$, weil die leere Linearkomb. 0 ergibt.

(ii) Sei $v_1, v_2 \in LH(M)$ $\quad$ z.z: $v_1 + v_2 \in LH(M)$.

$$v_1 = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j u_j \qquad u_j \in M \qquad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

$$v_2 = \sum_{k=1}^{s} \mu_k w_k \qquad w_k \in M \qquad \mu_k \in \mathbb{R}$$

$$v_1 + v_2 = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_s w_s$$

$$\in LH(M).$$

(iii) Sei $v \in LH(M)$, sei $\lambda \in \mathbb{R}$ (z.z: $\lambda v \in LH(M)$.)

$$v = \sum_{j=1}^{r} \mu_j u_j \qquad \mu_j \in \mathbb{R}, \; u_j \in M$$

$$\lambda v = \lambda \sum_{j=1}^{r} \mu_j u_j = \sum_{j=1}^{r} (\lambda \mu_j) u_j \in LH(M).$$

(b) Sei $U \in \mathbb{R}^n$ UVR mit $M \subset U$ (z.z: $LH(M) \subseteq U$).

Sei $v \in LH(M)$. z.z: $v \in U$.

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \quad , \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$
$$v_j \in M.$$

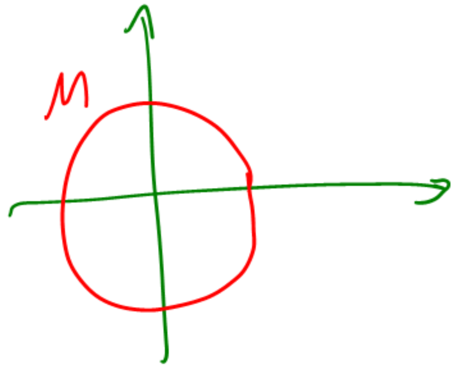
$\Rightarrow v_j \in U.$

$\lambda_j v_j \in U$, weil U UVR.

$v = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j \in U$, weil U UVR. $\square$

$LH(M) = x_1 x_2$- Ebene.

$\mathbb{R}^2$



$LH(M) = \mathbb{R}^2$.

<u>Def 2.3.5</u> $U \subseteq \mathbb{R}^n$ UVR

$M \subseteq U$ heiße Erzeugendensystem, wenn

$$LH(M) = U.$$

<u>Anmerkung:</u> U UVR

$$LH(U) = U.$$

U ist Erzeugendensystem von U.

geg:

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Gibt es außer 0 noch weitere $x \in \ker A$?

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

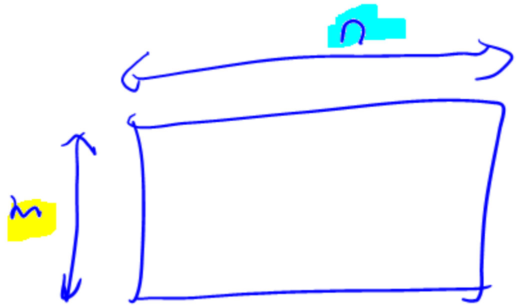
$$x \in \ker A \iff Ax = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\iff x = 0.$$

$$\ker A = \{0\}.$$

<u>Satz:</u> Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gegeben

mit $\boxed{m < n}$,



Dann $\exists\, x \in \ker A : x \neq 0$.

<u>Bw:</u> Vollst. Induktion nach m

<u>Induktionsanfang:</u> $m=1$

$\left(\text{z.z.: } \forall A \in \mathbb{R}^{1\times n} \ \exists\, x \neq 0 \quad Ax = 0 \right)$
$\quad n > 1$

$$A = (a_{11},\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n}) \in \mathbb{R}^{1\times n}.$$

<u>Fall 1:</u> $a_{11} = 0$.

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad Ax = (a_{11} \cdots \ ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} \cdot 1 = 0.$$

Fall 2: $a_{11} \neq 0$. Weil $n > 1$ ist $n \geq 2$.

$$x := \begin{pmatrix} -a_{12} \\ a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{12} \\ a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11} = 0.$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\forall n > m \ \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} \ \exists x \neq 0 \ Ax = 0.$$

Induktionsschluss:

z.z: $\forall n > m+1 \ \forall A \in \mathbb{R}^{(m+1) \times n} \ \exists x \neq 0 \ Ax = 0.$

$$
\begin{array}{cc}
 & \\
m+1 & A = \left(\begin{array}{ccc} & & \boxed{\begin{matrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m+1,n} \end{matrix}} \end{array} \right) \\
 & n
\end{array}
$$

<u>Fall 1:</u> $\begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m+1,n} \end{pmatrix} = 0.$

Setze $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$

$$A x = \left(\; ? \; \middle| \; 0 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Fall 2: $\begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m+1,n} \end{pmatrix} \neq 0$, d.h. $\exists\, i \in \{1, \dots, m, m+1\}$

$a_{i,n} \neq 0$.

i-te Zeile des LGS:

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_n = \frac{-a_{i1} x_1 - \dots - a_{i(n-1)} x_{n-1}}{a_{i,n}}$$

Einsetzen in übrige Gleichungen gibt ein

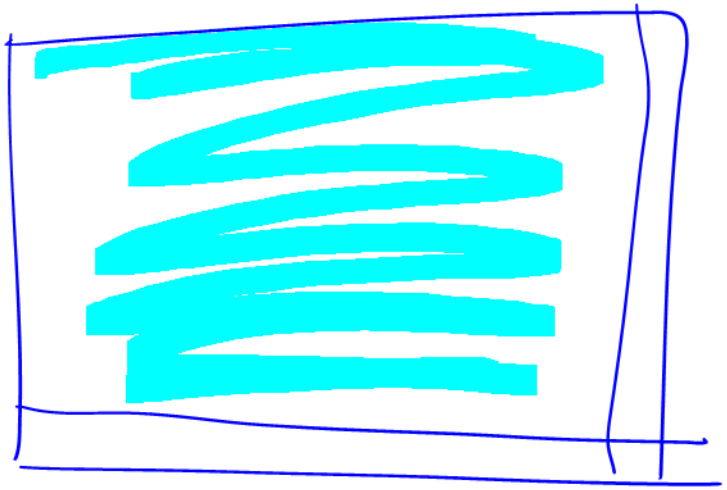
$m \times (n-1)$ LGS.

Nach I.V. $\exists\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0$, das dieses LGS löst.

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ \dfrac{-a_{i1}x_1 - \dots - a_{i(n-1)}x_{n-1}}{a_{i,n}} \\ \vdots \end{pmatrix} \in \ker A .$$

$\tilde{x} \neq 0$, weil nach IV.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0 .$$



z.B.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 42 \\ 0 & 1 & -1 & -65 \\ -1 & -1 & 0 & 23 \end{pmatrix}$

Nach 2.3.7 $\underbrace{\exists\ x_1, x_2, x_3, x_4}_{\text{nicht alle } 0.} : \underbrace{A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}} = 0.$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 42 \\ -65 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies zeigt: Es gibt eine nichttriviale (d.h. nicht alle Skalare 0) Linearkomb. der Spalten, die 0 ergibt.

$\rightsquigarrow$ Spalten sind linear abhängig.

Def 2.3.9: Geg: endlichen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{N}_0$

mit paarw. verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_r$,

$$M = \{v_1, \dots, v_r\}.$$

(a) M heiße linear unabh.

$$:\Longleftrightarrow \forall \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j = 0 \Longrightarrow \forall_j \; \lambda_j = 0 \right)$$

(b) M heiße linear abhängig, sonst, d.h.

$$\Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j = 0 \text{ und } \exists_j \; \lambda_j \neq 0 \right)$$

$$\neg (A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow A \wedge \neg B$$

2.3.13 Satz: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ lin. unabh.

$$\Longrightarrow |M| \leq n.$$

Bw: Per Widerspruch

$$|M| = m > n$$

$$M = \{v_1, \dots, v_m\}$$

$$A := \left(v_1 \middle| \dots \middle| v_m \right) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Nach Satz 2.3.7 $\exists x \neq 0 \quad x \in \ker A$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ mit $\exists j$ $x_j \neq 0$.

$$Ax = 0$$

$$\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m = 0.$$

Da nicht alle x_j Null sind

folgt $\{v_1, \dots, v_m\}$ linear abh. $\lightning$.