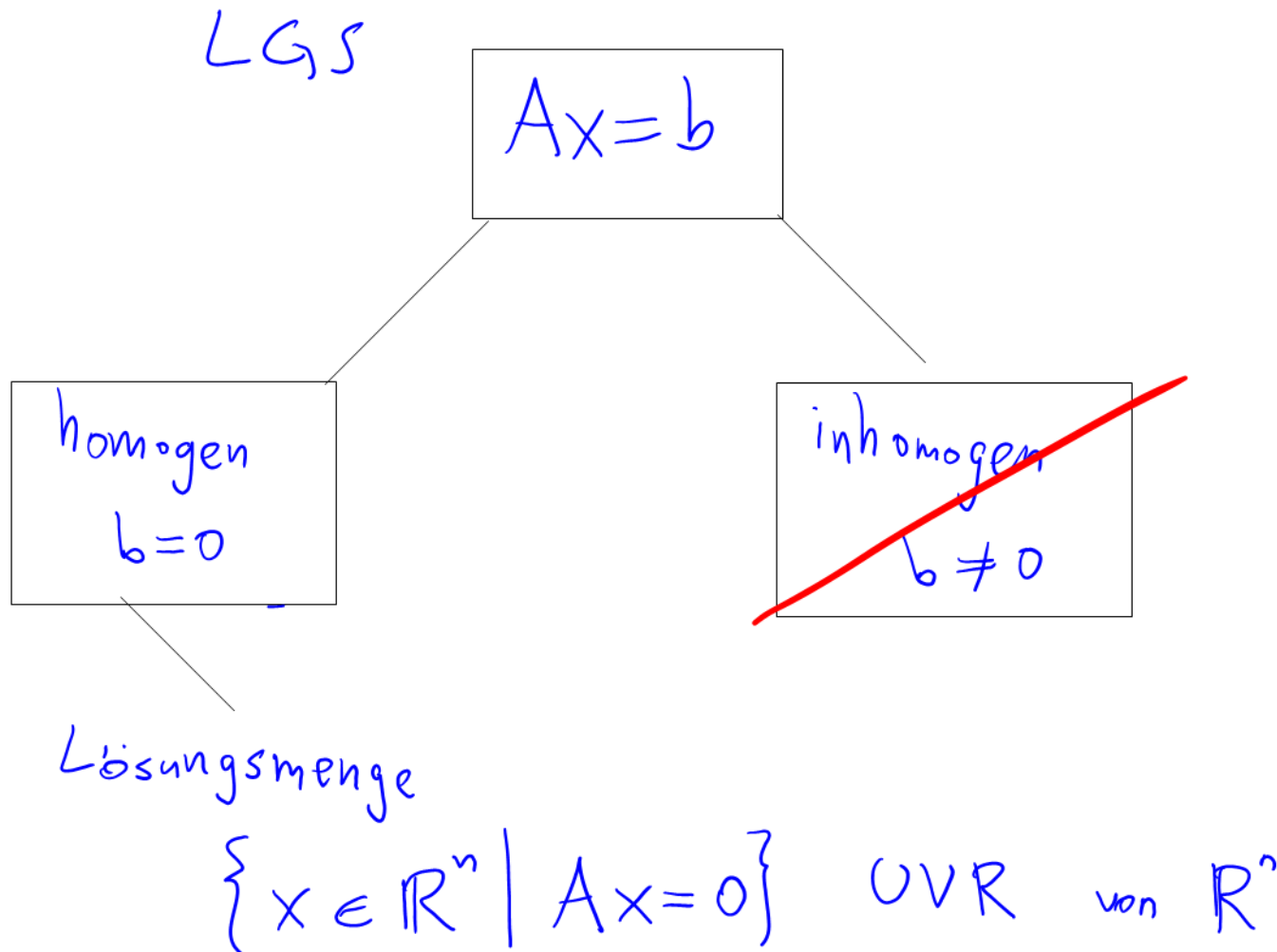


Lineare Algebra I

für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2023/24



Geg: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $U \subseteq \mathbb{R}$

Gesucht: $M \subseteq U$ Erz.system von U , d.h. $\text{LH}(M) = U$

Bem 2.3.6: Wenn $M_1 \subseteq M_2 \subseteq U$
und M_1 Erz.system von U

Dann ist auch M_2 Erz.system von U .

U ist Erz.system von U .

Ziel: Finde möglichst kleines Erz.system.

(Basis)

Def 2.3.9: Geg: endliche Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{N}_0$
mit paarw. verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_r$

$$M = \{v_1, \dots, v_r\}.$$

(a) M heiße **linear unabh.**
: $\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j = 0 \Rightarrow \forall j \lambda_j = 0 \right)$

Bem 2.3.12: Wenn $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$
und M_2 lin. unabh. ist,
dann ist auch M_1 lin. unabh.

$\emptyset$ ist lin. unabh.

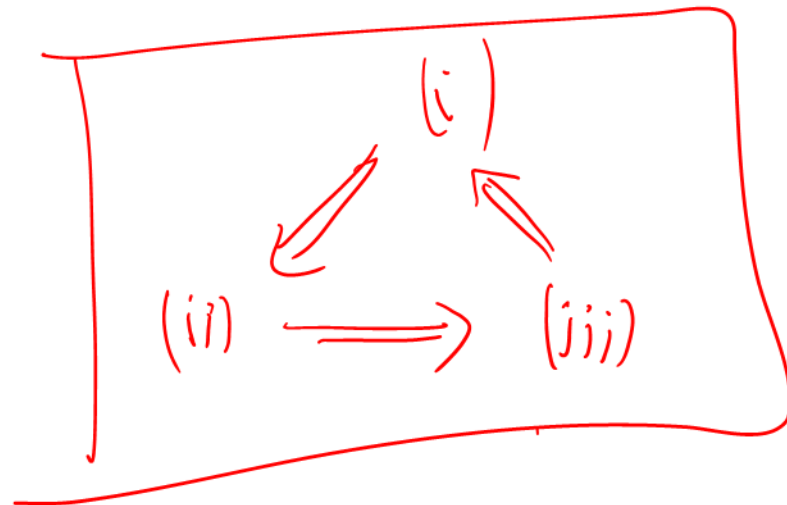
Satz 2.3.13 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ lin. unabh. $\Rightarrow |M| \leq n$

Lemma 2.3.11

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich.

Dann sind äquivalent:

- (i) M ist lin. unabh. (d.h. $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i \lambda_i = 0 \right)$)
- (ii) $\forall v \in \text{LH}(M)$: v hat eine eindeutige Darstellung als Linearkomb aus Vektoren in M
- (iii) $\forall v \in M : v \notin \text{LH}(M \setminus \{v\})$



$$A \Leftrightarrow B$$

$$\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$

$$M = \{v_1, \dots, v_r\}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Sei $v \in \mathcal{LH}(M)$.

$$\text{Ang. } v = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^r \mu_i v_i \quad (\text{z.z. } \forall i \quad \lambda_i = \mu_i)$$

$$0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^r \mu_i v_i$$

$$= \sum_{i=1}^r (\lambda_i v_i - \mu_i v_i) = \sum_{i=1}^r (\lambda_i - \mu_i) v_i$$

Nach Vorausss. (i) gilt somit $\forall i \in \{1, \dots, r\} : \lambda_i - \mu_i = 0$.
 $\Rightarrow \lambda_i = \mu_i$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $v \in M$.

z.z: $v \notin LH(M \setminus \{v\})$.

$$M = \{v_1, \dots, v_r\}.$$

$$\text{OBdA: } v = v_1.$$

wlog

$$\text{Ang: } v = v_1 \in LH(M \setminus \{v\})$$

$$= LH(\{v_2, v_3, \dots, v_r\}).$$

$$v = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r = 0 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r$$

$$v = v_1 = 1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_r$$

$$\Rightarrow 0 = 1 \quad \downarrow$$

(iii) $\Rightarrow$ (i).

$$\text{Ang: } 0 = \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j$$

$$\text{z.z: } \forall j \quad \lambda_j = 0.$$

Ang: $\exists j \in \{1, \dots, r\} \quad \lambda_j \neq 0.$

z.z.: $\Downarrow$

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_j v_j + \dots + \lambda_r v_r \quad \Big| \cdot \frac{1}{\lambda_j}$$

$$0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 + \dots + v_j + \dots + \frac{\lambda_r}{\lambda_j} v_r$$

$$\Rightarrow v_j = - \frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} v_{j-1} - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} v_{j+1} - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_j} v_r$$

$$v_j \in \text{LH}(M \setminus \{v_j\}).$$

Das widerspricht (iii) $\Downarrow$.



Daraus folgt insb:

M lin. abh

$$\Leftrightarrow \exists v \in M \quad v \in \text{LH}(M \setminus \{v\})$$

z.B.: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ lin. abh $\subseteq \mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \text{LH}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin \text{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$$

z.B. 2.3.10

$\emptyset$ lin unabh

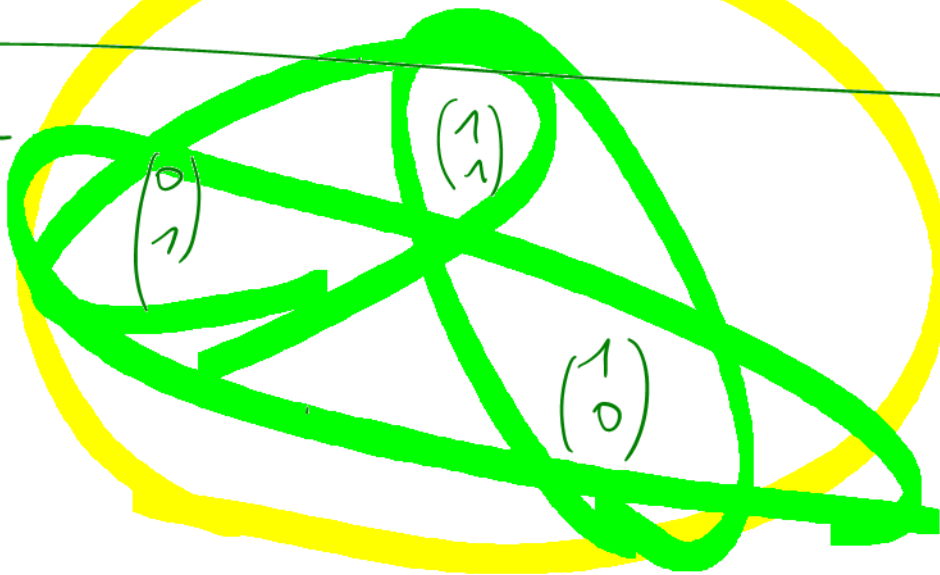
Wenn $0 \in M$, dann ist M lin. abh.

$$M = \{v\} \Rightarrow (M \text{ lin unabh} \Leftrightarrow v \neq 0)$$

$$M = \{v, w\} \Rightarrow \left(M \text{ lin abh} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \exists \lambda \ v = \lambda w \\ \text{oder} \\ \exists \lambda \ w = \lambda v \end{pmatrix} \right)$$

z.B.

$\mathbb{R}^2$



Def. 2.3.14 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ UVR.

$n \in \mathbb{N}$.

$B \subseteq U$ endlich

B heiße **Basis** von U , wenn

(i) B Erzeugendensystem von U , d.h. $\text{LH}(B) = U$

(ii) B ist lin. unabh.

Lemma 2.3.15: $B \subseteq U$, U UVR von $\mathbb{R}^n$

Dann sind äquivalent

i) B ist eine Basis von U

ii) $\forall v \in U$: v lässt sich eindeutig schreiben als Lin. komb. aus B .

Bw: folgt direkt aus 2.3.11

z.B.: $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \in U$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$

$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von U .

$V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ z.z.: $(v \in \text{LH}(B_1))$
 $-x_1 - x_2 = x_3$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Also } \text{LH} (B_1) = U.$$

B_1 lin unabh?

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{f. z. : } \alpha = \beta = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix}$$

$-\alpha - \beta = 0$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Basis von } U,$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist auch eine Basis von } U.$$

z.B.: $U = \mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Basis für } \mathbb{R}^2$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist auch eine Basis.}$$

Def 2.3.17 (Standardbasis)

$$U = \mathbb{R}^n$$

Für $n \in \mathbb{N}$ heiße

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Standardbasis von $\mathbb{R}^n$

Die einzelnen Vektoren

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heißen Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^n$.

Satz 2.3.19 Basisauswahl
und -ergänzungssatz

Gegeben: $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$
 $L \subseteq U$ lin. unabh.
 $M \subseteq U$ Erzs. system

$$\boxed{L \subseteq M}$$

$\Rightarrow \exists B \subseteq U : B$ Basis von U

$$L \subseteq B \subseteq M$$

Korollar 2.3.19: Jede $U \subseteq \mathbb{R}^n$ hat eine Basis

Bw: $L = \emptyset$ $M = U$.

Korollar 2.3.20 $W \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$

W, U $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Jede Basis von W lässt sich zu einer Basis von U
vervollständigen.

$U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$

$\emptyset \subseteq U$ lin. unabh.

U Erzs. system



Bw: Sei L Basis von W , $M = U$.

Satz 2.3.18 $\Rightarrow \exists B$ Basis von V : $L \subseteq B$.

Satz 2.3.18 Basisauswahl
und -ergänzungssatz

Gegeben: U UVR von $\mathbb{R}^n$
 $L \subseteq U$ lin. unabh.
 $M \subseteq U$ Erzeugnis
 $L \subseteq M$

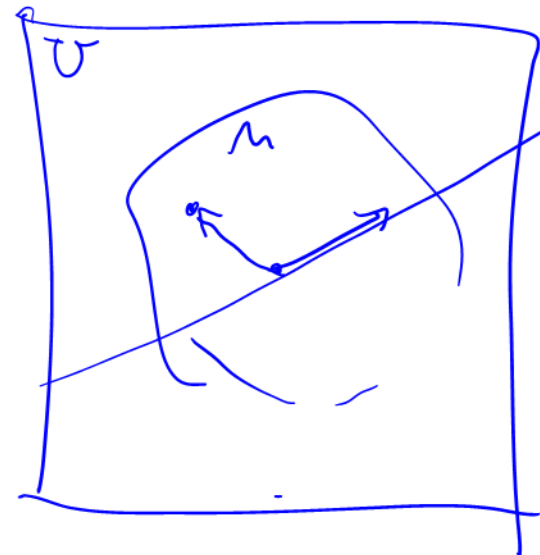
$\Rightarrow \exists B$ Basis von V
 $L \subseteq B \subseteq M$

Bw: $L = \{v_1, \dots, v_r\}$.

Setze $L_r := L$.

$\hookrightarrow \text{LH}(L_r) \subseteq U$

Fall 1: $M \subseteq \text{LH}(L_r)$.



$$\Rightarrow \underbrace{LH(M)}_{=U} \in LH(L_r) \subseteq U$$

$$\Rightarrow LH(L_r) = U$$

L_r ist Erzeugendensystem für U .
 L_r lin. unabh. $\} \Rightarrow B := L_r$.

Fall 2: $\exists v_{r+1} \in M, v_{r+1} \notin LH(L_r)$.

$L_{r+1} := L_r \cup \{v_{r+1}\} = \{v_1, \dots, v_{r+1}\}$. lin. unabh.

$$L_{r+1} \subseteq M$$

$$L \subseteq L_{r+1}$$

zurück zu)



Weil $|L_r| \leq n$, muss dies nach endlich
 vielen Schritten terminieren.



Satz 2.3.22 Wohldefiniertheit der Dimension

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ UVR.

Dann haben alle Basen von U gleich viele Elemente.

Bw: (ander^{ein} als im Skript)

$B = \{b_1, \dots, b_k\}$ Basis

$C = \{c_1, \dots, c_l\}$ Basis

z.z.: $k = l$.

Per Widerspruch: $k \neq l$

$\Rightarrow k > l$ oder $l > k$.

OBdA: $l > k$.

(z.z. $\hookrightarrow$)

$B = \{b_{ij}\} \Rightarrow B$ Erzsysten, d.h.

$$U = \text{LH}(B).$$

$$c_1 \in U. \quad c_1 = \sum_{i=1}^k a_{i,1} b_i$$

$$a_{i,1} \in \mathbb{R}$$

$$c_2 = \sum_{i=1}^k a_{i,2} b_i$$

$$\forall j \in \{1, \dots, l\}:$$

$$c_j = \sum_{i=1}^k a_{i,j} b_i$$

$$a_{i,j} \in \mathbb{R}$$

$$A := (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,l} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times l}$$

$l > k.$

2.3.7

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^l \neq 0 \quad x \in \ker A.$$

$$0 = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^l a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^l a_{kj} x_j \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^l a_{ij} x_j = 0}$$

$$\sum_{j=1}^l x_j c_j = \sum_{j=1}^l x_j \sum_{i=1}^k a_{ij} b_i$$

$$= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^l a_{ij} x_j \right) b_i = 0$$

Das ist ein Widerspruch zu C lin. unabh.



Def.

2.3.23

Dimension

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$

UVR.

, $\dim(U) := |B| \in \mathbb{N}_0$, wobei B eine Basis von U ist.

z.B.:

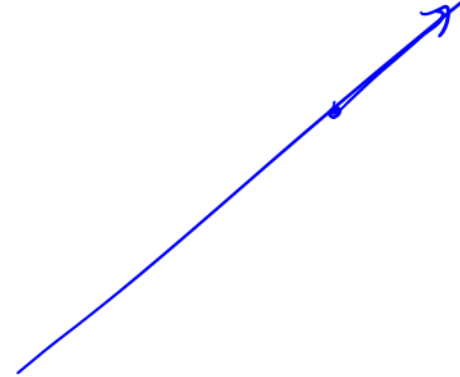
$$\dim(\{0\}) = 0$$

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

$$v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$U = \text{LH}(v) = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim U = 1.$$



Lemma

$$W \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \dim W \leq \dim U$$

$$W \subsetneq U \Rightarrow \dim W < \dim U.$$

Satz 2.3.21 steinitzscher Austauschsatz

$$U \subseteq \mathbb{R}^n \quad u \in U$$

$$B = \{b_1, \dots, b_r\} \text{ Basis von } U$$

$$\text{Geg: } v = \sum_{j=1}^r \lambda_j b_j$$

Wenn $k \in \{1, \dots, r\}$ so gewählt ist, dass $\lambda_k \neq 0$

Dann ist auch $(B \setminus \{b_k\}) \cup \{v\}$

eine Basis von U .