

Lineare Algebra I

für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2023/24

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ UVR mit Basis B .

$$\dim(U) := |B| \in \mathbb{N}_0$$

2.3.19 $\Rightarrow$ Existenz

2.3.22 $\Rightarrow$ Dimension ist wohldef.

$$0 \in U$$

$$\forall v, w \in U : v + w \in U$$

$$\begin{aligned} &\forall v \in U \\ &\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda v \in U \end{aligned}$$

Lemma 2.3.26: $W \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ ^(a)
 $\dim W \leq \dim U$

$W \subsetneq U \Rightarrow \dim W < \dim U.$

Bw: (a) Kor. 2.3.19 $\exists B_W \subseteq W$ B_W Basis für W .

2.3.18 $\exists B \subseteq U$ Basis von U , $B_W \subseteq B_U$.

$$\dim W = |B_W| \leq |B_U| = \dim U$$

(b) $W \subsetneq U$, $W \subseteq U$, $\exists u_0 \in U$, $u_0 \notin W$.

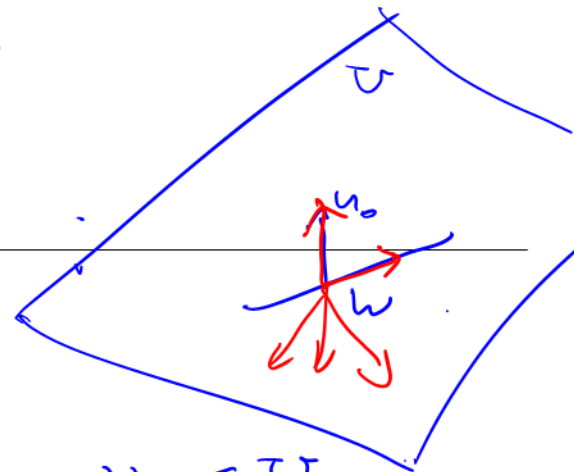
Kor. 2.3.19 $\exists B_W \subseteq W$ Basis von W

$u_0 \notin \text{Lin}(B_W) \Rightarrow L = B_W \cup \{u_0\}$ linear unabh. $\subseteq U$.

2.3.18 $\exists B_U \subseteq U$ Basis von U , $L \subseteq B_U$.

$$\dim W = |B_W| < |B_W| + 1 = |L| \leq |B_U| = \dim U$$

□



z.B.: $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^2$

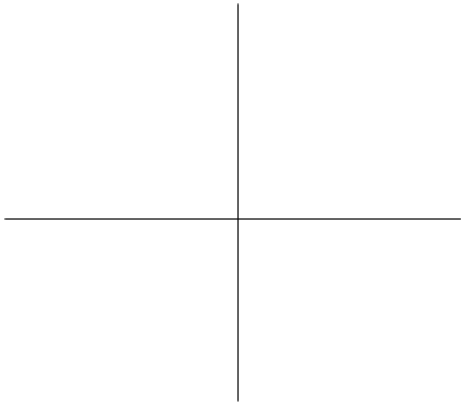
$$\dim \mathbb{R}^2 = 2$$

$$\dim U \leq 2$$

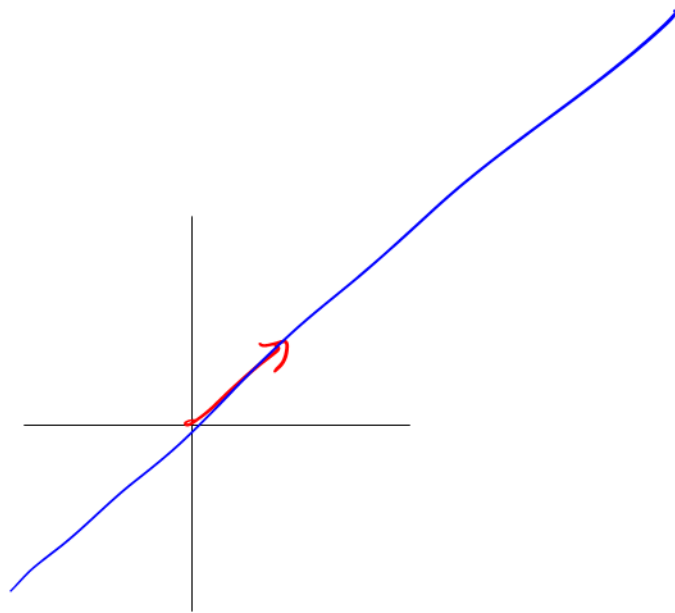
$$\dim U \in \{0, 1, 2\}.$$

$$\dim U = 0$$

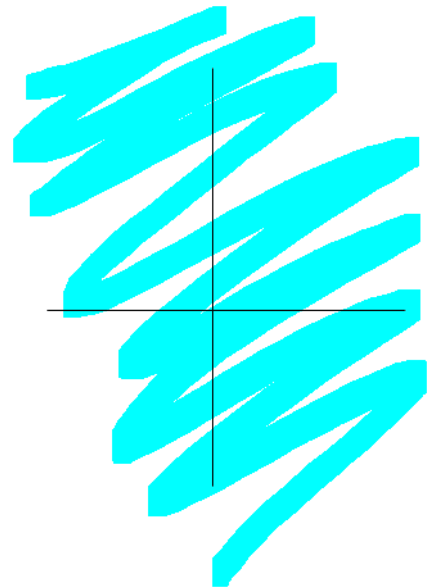
$$\{0\}$$



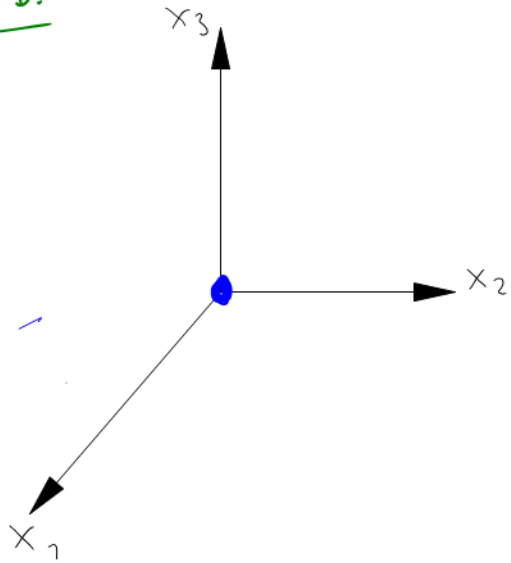
$$\dim U = 1$$



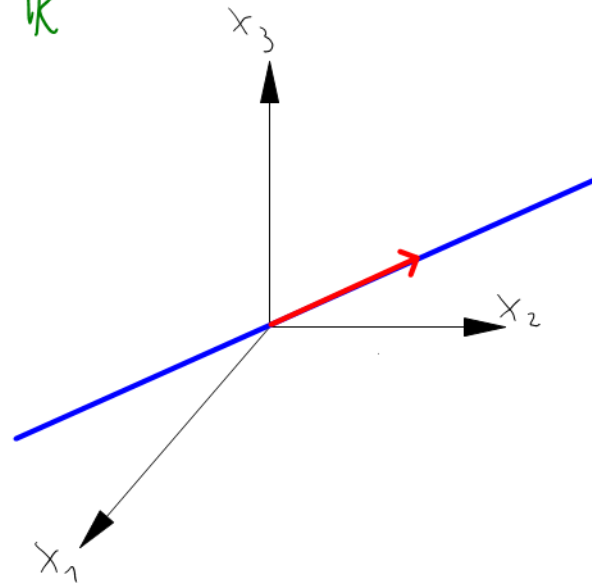
$$\dim U = 2$$



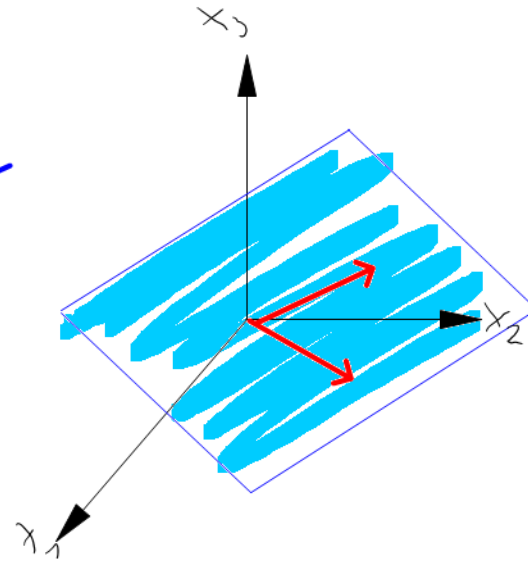
z.B.: UVR von $\mathbb{R}^3$



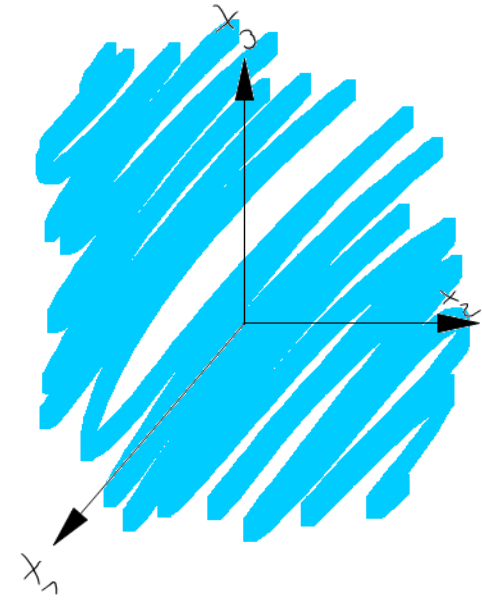
$\dim U = 0$
 $U = \{0\}$



$\dim U = 1$



$\dim U = 2$



$\dim U = 3$
 $U = \mathbb{R}^3$

Affine Unterräume

$$\text{lin. Unterraum} = \cup VR$$

Def: Eine Teilmenge $R \subseteq \mathbb{R}^n$

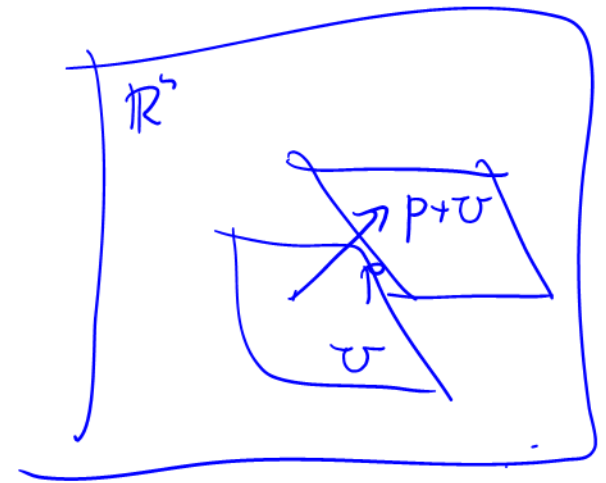
heißt **affiner Unterraum**, wenn

$$\exists p \in \mathbb{R}^n$$

$$\exists U \subseteq \mathbb{R}^n \cup VR$$

$$R = p + U$$

$$= \{ p + u \mid u \in U \} \subseteq \mathbb{R}^n$$



Anm: $p=0$ ist erlaubt, also

$\cup VR \Rightarrow$ affiner Unterraum

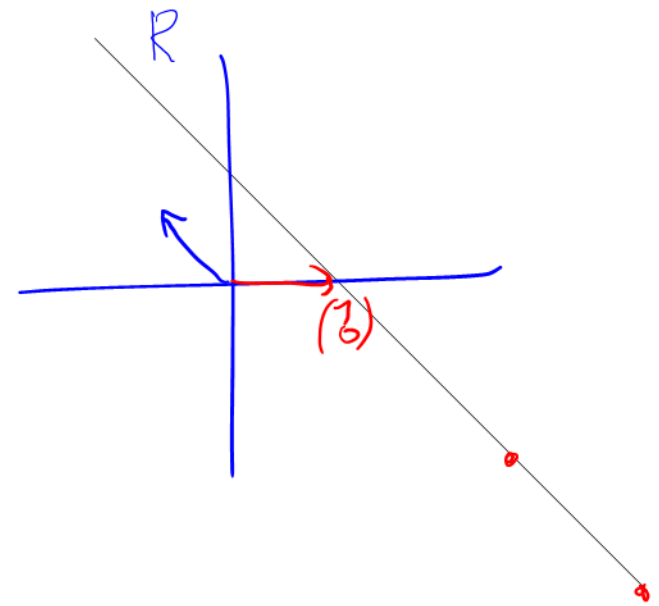
p ist nicht eindeutig.

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{LH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{LH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Fußpunkt ist nicht eindeutig.



Aber: $R = p + U \Rightarrow U = \{x - y \mid x, y \in R\}$

" $\subseteq$ "
" $\supseteq$ "

$\dim R := \dim U$, wenn $R = p + U$, $p \in \mathbb{R}^n$,
 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ UVR von $\mathbb{R}^n$.

$$\dim \{p\} = 0.$$

Def 2.4.7 Affinkombinationen

$n \in \mathbb{N}$

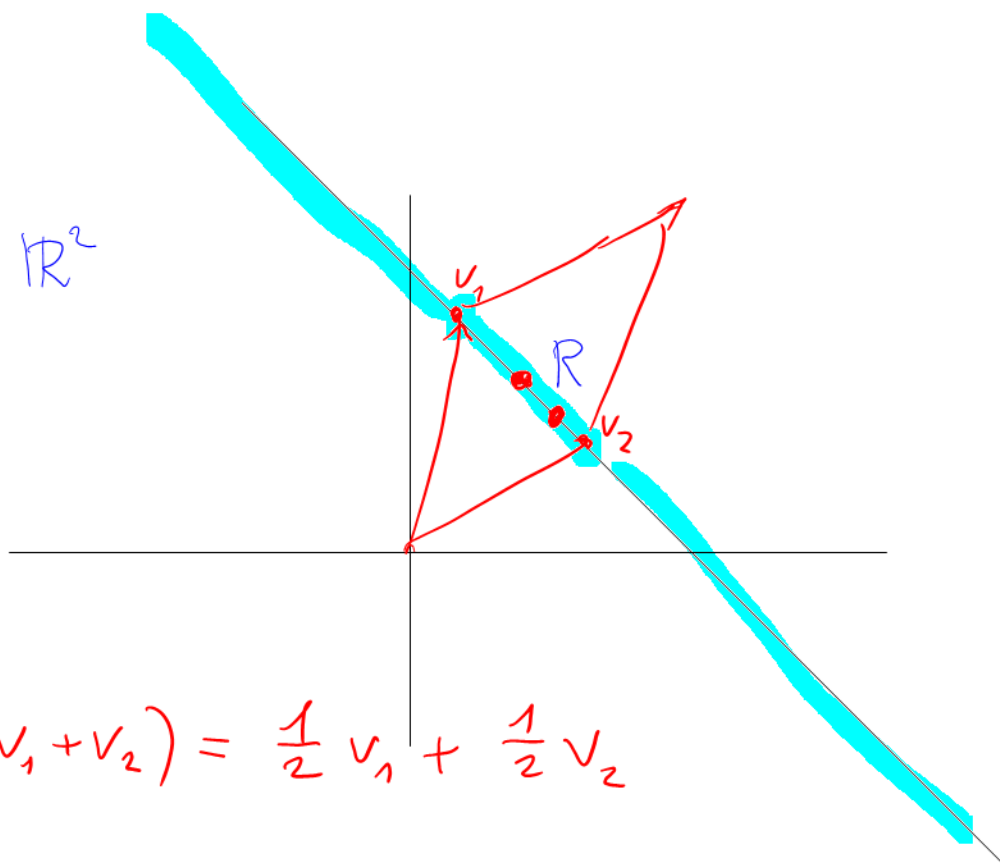
Gegeben: $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ mit $r \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j$$

heißt

Affinkombination, wenn

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j = 1$$



$$\frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$$

$$tv_1 + (1-t)v_2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Satz 2.4.8 Charakterisierung von affinen Unterräumen $n \in \mathbb{N}$

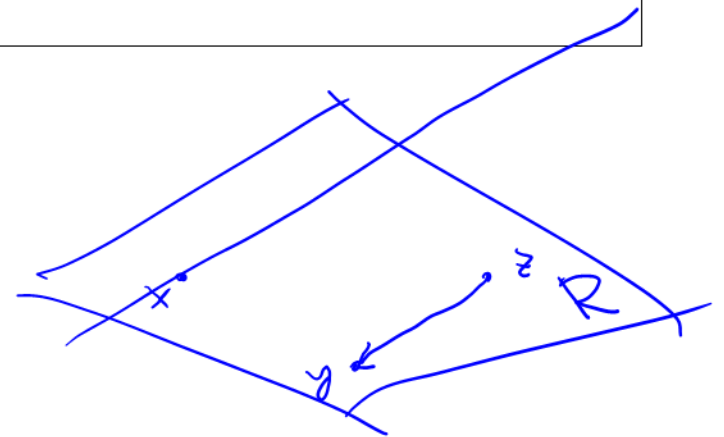
$$R \subseteq \mathbb{R}^n$$

Dann sind äquivalent:

(i) R ist ein affiner Unterraum (d.h. $\exists p \in \mathbb{R}^n, \cup \cup v \in \mathbb{R}^n : R = p + \cup$).

(ii) $R \neq \emptyset$ und $\forall x, y, z \in R : \forall \lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda(y - z) \in R$.

(iii) $R \neq \emptyset$ und jede Affinkombination von endlich vielen Vektoren in R ist wieder in R .



Bw: (i) $\Rightarrow$ (iii) $\boxed{R = p + U}$ $p \in \mathbb{R}^n, U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$p \in R \Rightarrow R \neq \emptyset.$$

$$x_1, \dots, x_r \in R; \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^r \lambda_j = 1.$$

$$\text{z.z.: } \sum_{j=1}^r \lambda_j x_j \in R.$$

$$x_j \in p + U, \text{ d.h.}$$

$$\exists u_j \in U: x_j = p + u_j.$$

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^r \lambda_j (p + u_j) = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j \right)}_{=1} p + \underbrace{\sum_{j=1}^r \lambda_j u_j}_{\in U} \in p + U = R.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $x, y, z \in R, \lambda \in \mathbb{R}$

$$x + \lambda(y - z) = 1 \cdot x + \lambda y + (-\lambda)z \in R.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Wir wissen:

- $x, y, z \in R, \lambda \in R$
 $x + \lambda(y - z) \in R$

- $R \neq \emptyset$

z.z: $\exists p \in R^n,$
 $\exists U \cup VR$
 $R = p + U$

$$R \neq \emptyset \Rightarrow \underline{\exists p \in R.}$$

$$U := R - p = \{x - p \mid x \in R\}$$

$$\Rightarrow R = p + U.$$

z.z: $U \cup VR.$

(a) $p \in R.$

$$0 = p - p \in R - p = U.$$

(a) $0 \in U$

(b) $\forall v, w \in U : v + w \in U$

(c) $\forall v \in U$
 $\forall \lambda \in R : \lambda v \in U$

(b) $v, w \in U$. $x = p + v$, $p + w \in R$.

$$p + v + w = \underbrace{(p + v)}_x + \underbrace{1}_{\lambda} (\underbrace{p + w}_y - \underbrace{p}_z) \in R \quad \Rightarrow \quad v + w \in R - p = U.$$

(c) $v \in U$ $x = p + v \in R$.
 $\lambda \in \mathbb{R}$

z.z: $\lambda v \in U = R - p$

$$p + \lambda v = \underbrace{p}_x + \underbrace{\lambda}_{\lambda} (\underbrace{p + v}_y - \underbrace{p}_z) \in R \quad \Rightarrow \quad \lambda v \in U.$$

Satz 2.4.10

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$$

LGS:

$$A x = b$$

WENN die Lösungsmenge mindestens eine Lösung $x_0 \in \mathbb{R}^n$ hat,
dann ist die Lösungsmenge ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$
und hat die folgende Form:

$$R = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A x = b \} = x_0 + \ker A$$

==

Bw: "S": $x \in \mathbb{R}, \quad Ax = b.$

$$u = x - x_0.$$

$$x = x_0 + u.$$

$$\text{z.z: } (u \in \ker A, \quad Au = 0)$$

$$Au = A(x - x_0) = \underbrace{Ax}_b - \underbrace{Ax_0}_b = b - b = 0.$$

$$x \in x_0 + \ker A$$

"U": $x \in x_0 + \ker A \quad (\text{z.z: } Ax = b)$

$\exists u \in \ker A: x = x_0 + u$

$$Ax = A(x_0 + u) = \underbrace{Ax_0}_b + \underbrace{Au}_{=0} = b.$$

Geg: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

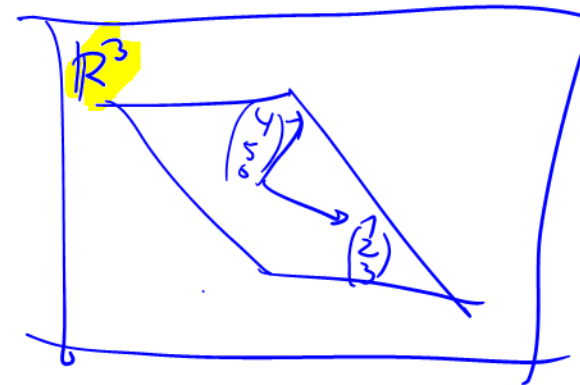
$$\varphi: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & Ax \end{pmatrix}$$

Bild A

$$\begin{aligned} &:= \text{Bild}(\varphi) = \left\{ b \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n \quad Ax = b \right\} \stackrel{?}{=} \mathbb{R}^m \\ &= \{ Ax \mid x \in \mathbb{R}^n \} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & 20 & 0 \\ 3 & 6 & 30 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

$$\text{Bild}(A) = \text{LH} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$



Lemma 2.4.12: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Das Bild von A ist die lineare Hülle
der Spalten von A .

Insbesondere ist $\text{Bild}(A)$ ein UVR von $\mathbb{R}^m$.

Bw: $A = (v_1 | \dots | v_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $v_j \in \mathbb{R}^m$.

$U = \text{LH}(v_1, \dots, v_n)$ UVR von $\mathbb{R}^m$.

z.z: $\text{Bild}(A) = U$.

$$\text{"}\subseteq\text{"}: b \in \text{Bild}(A) \\ = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$\text{z.z.}: b \in U$$

$$\underline{\exists x \in \mathbb{R}^n}: Ax = b.$$

$$b = Ax = \left(v_1 \mid \dots \mid v_n \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \\ \in U.$$

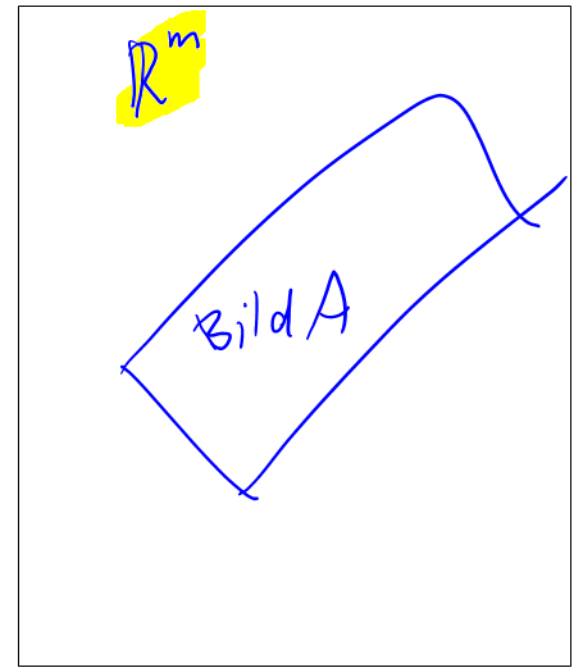
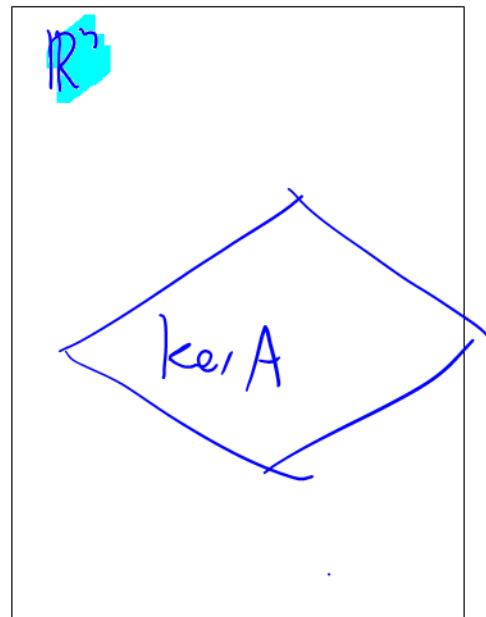
$$\text{"}\supseteq\text{"}: b \in U = \text{LH}(v_1, \dots, v_n).$$

$$b = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = \left(v_1 \mid \dots \mid v_n \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \text{Bild } A.$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\text{Bild}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$\text{Ker}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$$



Def: **Rang** von A ist Dimension von Bild von A .

$$\text{rang}(A) = \text{rg}(A) := \dim \text{Bild } A$$

$$= \dim \text{LH}(v_1, \dots, v_n)$$

2.4.12

$$A = (v_1 | \dots | v_n)$$

$\leadsto \text{rg}(A) = \text{maximale Anzahl linear unabh. Spalten.}$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\varphi: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^m \\ x & \xrightarrow{\quad} & Ax \end{pmatrix}$$

$$\forall b \in \mathbb{R}^m \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = b$$

$\Leftrightarrow \varphi$ ist surjektiv

$\Leftrightarrow$

$$\text{Bild}(\varphi) = \mathbb{R}^m$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{rg}(A) = m$$

Lemma 2.4.15

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

DANN

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A) \\ \text{b)} \quad & \text{und } \text{rg}(AB) \leq \text{rg}(B) \end{aligned}$$

$$A \quad B \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$(m \times n) \quad (n \times p)$

Bw: (a) Sei $z \in \text{Bild}(AB)$.

$$AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$\exists x \in \mathbb{R}^p: z = ABx.$$

$$z = Ay \in \text{Bild}(A).$$

$$\Rightarrow \text{Bild}(AB) \subseteq \text{Bild}(A)$$

$$\Rightarrow \text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A).$$

(b)

$$\left(\text{z.z. } \operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg}(B). \right)$$

$$\underline{\operatorname{Bild} B \subseteq \mathbb{R}^n} \quad \text{ouR}$$

$$\exists \text{ Basis } \{y_1, \dots, y_r\} \text{ von } \operatorname{Bild} B \subseteq \mathbb{R}^n \quad \operatorname{rg} B = \dim \operatorname{Bild} B = r.$$

$$z \in \operatorname{Bild}(AB).$$

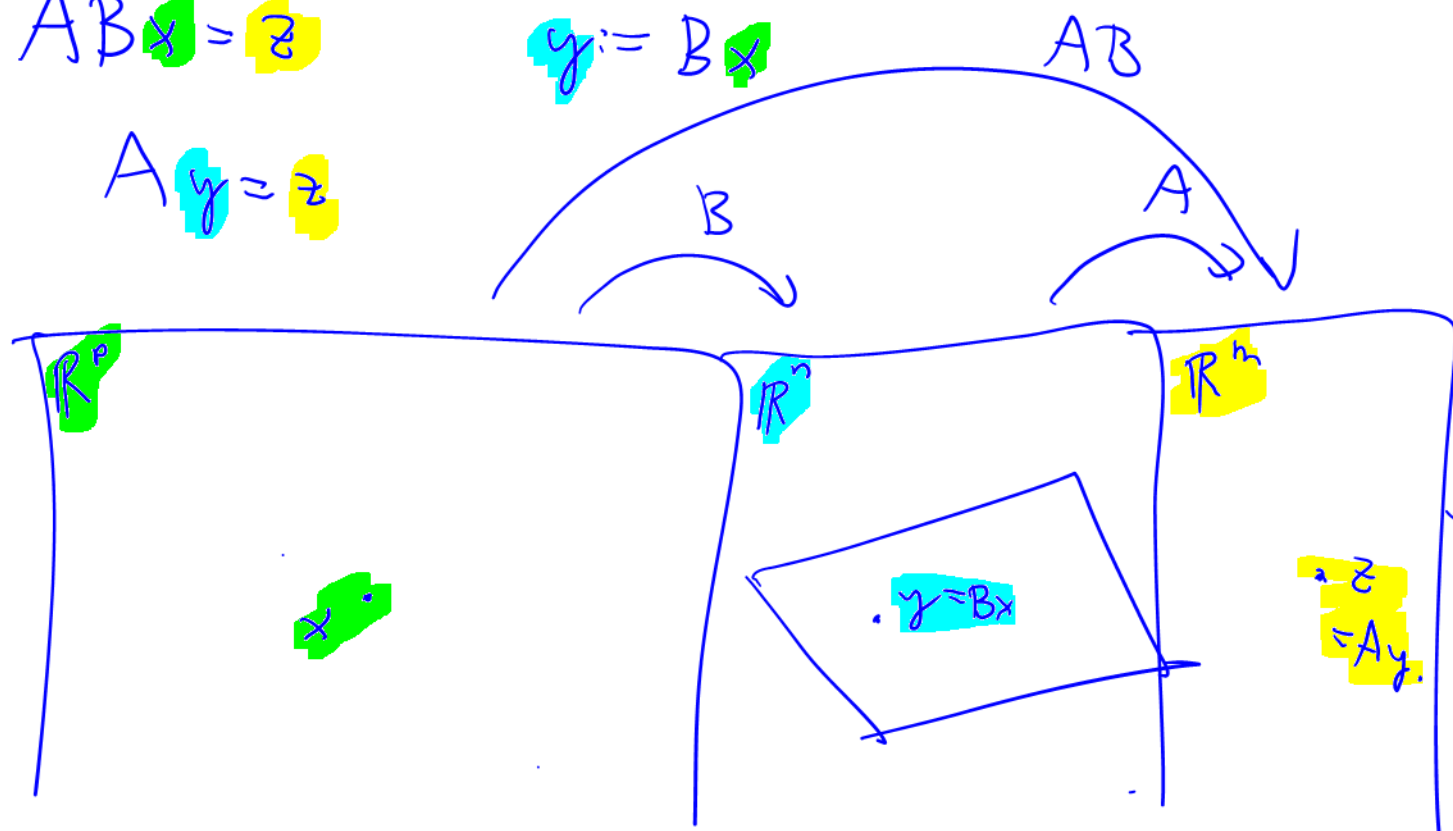
$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^p: ABx = z$$

$$Ay = z$$

$$y := Bx$$

$$y = \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j$$

$$z = Ay = A \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j$$



$$= \sum_{j=1}^r \lambda_j A y_j.$$

$$\text{Bild}(AB) = \text{LH}(A y_1, \dots, A y_r)$$

$$\dim \text{Bild}(AB) \leq r = \dim(\text{Bild } B). \quad \square$$

Anmerkung: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$\text{Bild } A \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$A = (v_1 \dots v_n).$$

$$\text{rg}(A) \leq m$$

$$\text{und } \text{rg}(A) \leq n$$

$$\boxed{\text{rg}(A) = \dim \text{Bild } A \leq \dim \mathbb{R}^m = m}$$

$$\boxed{\text{rg}(A) = \dim \text{Bild } A = \dim \text{LH}(v_1, \dots, v_n) \leq n}$$