Lineare Algebra I für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2023/24

Gaußsches Eliminationsverfahren (Gauß-Algorithmus), grober Plan

Der *Gauß-Algorithmus* oder das *Gaußsche Eliminationsverfahren* besteht aus drei bzw. vier Teilen:

(I) Gegeben ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, verwende man Zeilenumformungen, um ein äquivalentes lineares Gleichungssystem $Zx = c$ zu erhalten, sodass Z in Zeilenstufenform ist.

(II) Entscheide, ob es überhaupt eine Lösung gibt, wenn nicht: brich ab.

(IIb) Optional: Verwende Zeilenumformungen, um das Gleichungssystem in erweiterte Zeilenstufenform zu bringen.

(III) Führe freie Variable ein und löse nach den Pivot-Variablen auf.

Schritt (IIb) ist nicht unbedingt notwendig, vereinfacht die Rechnung aber häufig.

Definition 2.5.3 (Elementare Zeilenumformungen)**.** Die folgenden Operationen werden *elementare Zeilenumformungen* genannt:

(G1) Das Addieren des μ-fachen einer Zeile auf eine *andere* Zeile.

(G2) Das Vertauschen zweier Zeilen.

(G3) Das Multiplizieren einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$.

(G1)

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ j \to \\ \\ i \to \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & \mu & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(G2)

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & j & \\ & & \downarrow & & \downarrow & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \to \\ \\ \\ j \to \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(G3)

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \to \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$Ax = b \iff \boxed{GA}\,x = \boxed{Gb}$$

$$Ax = b$$

$$G_1 A x = G_1 b$$

$$G_2 G_1 A x = G_2 G_1 b$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{G_N G_{N-1} \cdots G_2 G_1}_{G} A x = \underbrace{G_N G_{N-1} \cdots G_2 G_1}_{G} b$$

$$\underbrace{GA}_{Z} x = \underbrace{Gb}_{c}$$

$$Zx = c$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \end{array}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{Z \neq A}$$

$$\boxed{\frac{4}{8} = \frac{1}{2}}$$

Gauß-Algorithmus Teil (I)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$.

- WENN die erste Spalte komplett nur Nullen enthält, ignoriere sie und wende diesen Algorithmus auf die Restmatrix an.
- WENN die erste Spalte einen Nichtnulleintrag erhält, wähle einen Nichtnulleintrag in der ersten Spalte und vertausche die entsprechende Zeile mit der ersten Zeile durch elementare Umformung (G2). (Falls der Eintrag ganz oben links nicht null ist, kann dieser Schritt entfallen).
- Benutze elementare Umformungen vom Typ (G1), um alle Einträge unter dem eben gewählten Pivot-Element auf Null zu setzen.
- Ignoriere von jetzt an die Spalte ganz links und die Zeile ganz oben und verfahre mit dem Rest wieder wie oben.

Die zu betrachtenden Restmatrizen werden immer kleiner und nach endlich vielen Schritten ist die Matrix in Zeilenstufenform. Jede der Umformungen muss auf die Matrix A und auf den Vektor b angewendet werden – nur so ist sichergestellt, dass die Lösungsmenge sich nicht ändert.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -5 & 30 & -65 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -10 & 21 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -10 & 22 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	0	-1	-5	30	-65	5	(G2)
0	1	0	2	-10	21	-1	
0	1	-1	3	-10	22	-2	
0	-2	3	-2	-5	10	0	

0	1	0	2	-10	21	-1	$\mid\cdot(-1)$
0	0	-1	-5	30	-65	5	(G1)
0	1	-1	3	-10	22	-2	
0	-2	3	-2	-5	10	0	

0	1	0	2	-10	21	-1	$\mid\cdot(-2)$ (G1)
0	0	-1	-5	30	-65	5	
0	0	-1	1	0	1	-1	
0	-2	3	-2	-5	10	0	

0	1	0	2	-10	21	-1	
0	0	-1	-5	30	-65	5	$\mid\cdot(-1)$ (G3)
0	0	-1	1	0	1	-1	
0	0	3	2	-25	52	-2	

0	1	0	2	-10	21	-1	
0	0	1	5	-30	65	-5	(G1)
0	0	-1	1	0	1	-1	
0	0	3	2	-25	52	-2	

0	1	0	2	-10	21	-1		
0	0	1	5	-30	65	-5	$\mid \cdot (-3)$	(G1)
0	0	0	6	-30	66	-6		
0	0	3	2	-25	52	-2		

0	1	0	2	-10	21	-1		
0	0	1	5	-30	65	-5		
0	0	0	6	-30	66	-6	$\mid \cdot \frac{1}{6}$	(G3)
0	0	0	-13	65	-143	13		

0	1	0	2	-10	21	-1		
0	0	1	5	-30	65	-5		
0	0	0	1	-5	11	-1	$\mid \cdot 13$	(G1)
0	0	0	-13	65	-143	13		

0	1	0	2	-10	21	-1
0	0	1	5	-30	65	-5
0	0	0	1	-5	11	-1
0	0	0	0	0	0	0

Gauß-Algorithmus Teil (II)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix in Zeilenstufenform mit r Pivot-Zeilen und $b \in \mathbb{R}^m$.

- WENN ($\forall j > r : b_j = 0$), DANN ist $b \in \text{Bild}(A)$ und es gibt es eine Lösung;
- WENN ($\exists j > r : b_j \neq 0$), DANN ist $b \notin \text{Bild}(A)$ und es gibt keine Lösung. Algorithmus abbrechen.

Gauß-Algorithmus Teil (IIb)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix in Zeilenstufenform mit r Pivot-Zeilen und $b \in \mathbb{R}^m$.

- Benutze elementare Umformungen vom Typ (G3), um alle Pivot-Einträge zu 1 zu machen.
- Benutze elementare Umformungen vom Typ (G1), um alle Einträge über den Pivot-Einträgen zu 0 zu machen. Beginne hierbei bei dem Letzten Pivot-Element.

Die Matrix ist nun in erweiterter Zeilenstufenform.

zurück zum Beispiel:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	1	0	2	-10	21	-1
0	0	1	5	-30	65	-5
0	0	0	1	-5	11	-1
0	0	0	0	0	0	0

$| \cdot (-5)$ (G1)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	1	0	2	-10	21	-1
0	0	1	0	-5	10	0
0	0	0	1	-5	11	-1
0	0	0	0	0	0	0

$| \cdot (-2)$ (G1)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	1	0	0	0	-1	1
0	0	1	0	-5	10	0
0	0	0	1	-5	11	-1
0	0	0	0	0	0	0

erw. Zeilenstufenform.

Gauß-Algorithmus Teil (III)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in Zeilenstufenform mit r Pivot-Zeilen und $b \in \mathrm{Bild}(A)$.

- Jede der $(n-r)$ Nicht-Pivot-Variablen – falls vorhanden – wird mit einem Parameter versehen.
- Löse jede der Gleichungen von unten nach oben nach den Pivot-Variablen auf.
- Stelle den allgemeinen Lösungsvektor $(x_1, \ldots, x_n)^\top$ in Abhängigkeit der $(n-r)$ Parameter auf.
- Schreibe den Lösungsvektor als Summe eines konstanten Vektors x_0 (also ohne Parameter) und einer Linearkombination von Vektoren $v_1, \ldots v_{n-r}$, wobei die Parameter die Skalare sind. Die Lösungsmenge ist nun der affine Unterraum

$$x_0 + \mathrm{LH}(v_1, \ldots, v_{n-r}).$$

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-r}$ sind nach Konstruktion linear unabhängig, also eine Basis für $\mathrm{LH}(v_1, \ldots, v_{n-r})$.
Die Dimension der Lösungsmenge ist also $n-r$, die Differenz zwischen dem Rang der Matrix und der Anzahl der Spalten.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	1	0	0	0	-1	1
0	0	1	0	-5	10	0
0	0	0	1	-5	11	-1
0	0	0	0	0	0	0

$s = x_1$

$t = x_5$

$u = x_6$

$$x_4 - 5t + 11u = -1$$

$$x_4 = -1 + 5t - 11u$$

$$x_3 - 5t + 10u = 0$$

$$x_3 = 5t - 10u$$

$$x_2 = 1 + u$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1+u \\ 5t-10u \\ -1+5t-11u \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1+u \\ 5t-10u \\ -1+5t-11u \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^6 \mid Ax = b\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overbrace{LH\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_{\text{Basis für ker } A}}^{\ker A}$$

$$\dim(\ker A) = 3$$

Satz 2.5.9 (Dimensionsformel)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto Ax$$

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) + \dim(\ker A) = n}$$

$$\boxed{\dim(\operatorname{Bild}(A)) + \dim(\ker A) = \dim \mathbb{R}^n}$$

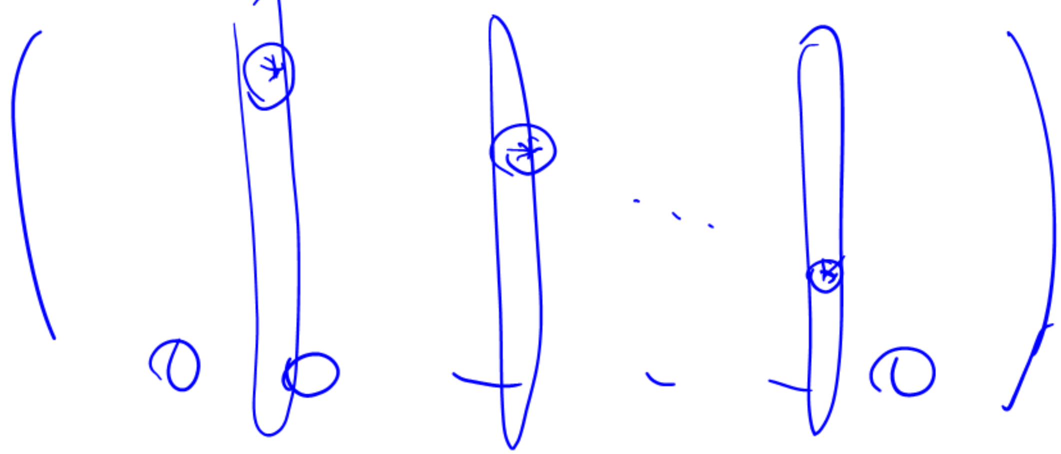
Bw: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Man kann A in Zeilenstufform Z bringen (mit element. Zeilenumf.)

$2.5.5 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(Z)$.

$\ker(A) = \ker(Z)$

(Achtung: Bild $A \neq$ Bild Z)

$Z =$  r Pivot-E!

2.5.6 $\Rightarrow$ $\operatorname{rg} Z =$ Anzahl der Pivot-Elemente $=: r$

$$\dim \ker(Z) = n - r$$

$$\dim(\ker A) + \operatorname{rg}(A)$$

$$= \dim(\ker Z) + \operatorname{rg}(Z)$$

$$= n - r + r = n. \qquad \blacksquare$$

Satz 2.5.8

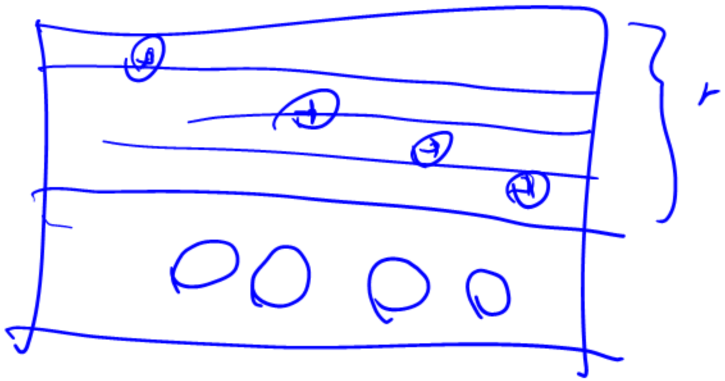
$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$$

Bw: FALLS A in Zeilenstufenform ist

und r Pivot-Elemente und $n-r$ Nicht-Pivot-El.

Die r Nicht-Nullzeilen sind linear unabh.



Zeilenrang $= r$

$\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$ falls A Zeilenstufenform.

Falls A nicht in Zeilenstufenform.

Wenden endlich viele elem. Zeilen umf. ($N \in \mathbb{N}$) auf A an

und erhalten Z in Zeilenstufenform.

$$Z = \underbrace{G_N \cdots G_3 G_2 G_1}_{G} A$$

z.z. $rg(A^T) = rg(A)$

$$Z = GA.$$

wissen: $rg(Z^T) = rg(Z)$.

$$rg(A) \underset{(2.5.5)}{=} rg(Z) = rg(Z^T) = rg((GA)^T)$$

$$\underset{(2.2.13)}{=} rg(A^T G^T) \underset{(2.4.15)}{\leq} rg(A^T)$$

$\rightsquigarrow \quad \mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(A^T)$

Analog: $\mathrm{rg}(A^T) \leq \mathrm{rg}(A)$

$$\Longrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T) \qquad \blacksquare$$

<u>Anm:</u> $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x \longmapsto Ax \end{pmatrix}$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$r = rg(A)$.

- $r = n$: $\dim \ker A = n - rg(A) = 0$. $\ker A = \{0\}$.

  Für jede $b \in \mathbb{R}^m$ gibt es höchstens ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$.

  φ injektiv

- $r = m$: $r = rg(A) = \dim \text{Bild}\, A$. $\qquad \text{Bild}\, A \subseteq \mathbb{R}^m$

  $\Longrightarrow \text{Bild}\, A = \mathbb{R}^m$

  $\boxed{\varphi \text{ surjektiv}}$

  Für jede $b \in \mathbb{R}^m$ gibt es mind. eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$.

Algebraische Strukturen

Assoziativgesetz:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$f : Y \to Z$

$g : X \to Y$

$h : W \to X$

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend left, "g \circ h"] & X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & Y \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}$ $\quad (x+y)+z = x+(y+z)$

$\quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

$\mathbb{R}^n$ $\quad (x+y)+z = x+(y+z)$

$\mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad (A+B)+C = A+(B+C)$

$\mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad (AB)C = A(BC).$

Def 3.1.1 Binäre Verknüpfung

Sei S eine Menge

$* : S \times S \longrightarrow S$

nennt man binäre Verknüpfung.

(zweistellige)

---

z.B.: $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ✓

$(x,y) \longmapsto x+y$

$\cancel{- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}}$

$\cancel{(x,y) \longmapsto x-y}$

Def: (Halbgruppe)

S Menge $\quad *: S \times S \longrightarrow S$ bin. Verknüpfung.

$(S, *)$ heißt Halbgruppe, wenn $*$ assoziativ ist, also

$$\forall x, y, z \in S: \quad (x * y) * z = x * (y * z).$$

Wenn zusätzlich $\forall x, z \in S: \quad x * y = y * x$,

dann heißt $(S, *)$ kommutative Halbgruppe.

z. B.

X Menge $S = P(X) = \{ A \mid A \subseteq X \}$

$$\cap : \begin{pmatrix} P(X) \times P(X) \longrightarrow P(X) \\ (A, B) \longmapsto A \cap B \end{pmatrix}$$

$(P(X), \cap)$ kommut. Halbgruppe.

$(P(X), \cup)$ kommut. Halbgruppe

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbb{R}, +) \\ (\mathbb{R}, \cdot) \end{array}\right\}$$ kommut. Halbgruppen

$(\mathbb{R}^{m\times n}, +)$ komm. Halbgr. (2.2.7)

$(\mathbb{R}^{n\times n}, \cdot)$ Halbgruppe (2.2.12)

(für $n \geq 2$ ist diese nicht kommutativ).

$(\mathbb{R}^{m\times n}, \cdot)_{m\neq n}$ $\cdot : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$

ist nicht def!

$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ } komm. Halbgruppen

$(\mathbb{N}, \uparrow)$ $x \uparrow y = x^y$ $\uparrow : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

NICHT assoziativ! $(2^3)^4 \neq 2^{(3^4)}$

Notation: X, Y Mengen

$$\boxed{x^y = y^x}$$

$$Y^X := \{ f \mid f: X \to Y \}$$

$$X^X = \{ f \mid f: X \to X \}$$

z.B.: $X = \{1,2,3\}$

$$|X^X| = 3^3 = 27.$$

$$\circ : \begin{pmatrix} X^X \times X^X \longrightarrow X^X \\ (f, g) \longmapsto f \circ g \end{pmatrix}$$

assoziativ.

$(X^X, \circ)$ Halbgruppe (i.A. nicht kommutativ) z.B.: S = Menge alle Zeichenketten (Wörter)

"Hello", "World" $\in S$.

$*: S \times S \longrightarrow S$ Verketten, Aneinanderkleben (Konkatenation)

"Hello" $*$ "World" = "HelloWorld".

$(S, *)$ Halbgruppe (nicht kommutativ).

Noch ein Beispiel:

$$D = \{ i, s_1, s_2, s_3, g, u \}$$

6 verschiedene Elemente

$$\star : D \times D \to D$$

"Cayley-Tafel"

$\star$	i	s_1	s_2	s_3	g	u
i	i	s_1	s_2	s_3	g	u
s_1	s_1	i	g	u	s_2	s_3
s_2	s_2	u	i	g	s_3	s_1
s_3	s_3	g	u	i	s_1	s_2
g	g	s_3	s_1	s_2	u	i
u	u	s_2	s_3	s_1	i	g

$$s_2 \star s_1 = u$$
$$s_1 \star s_2 = g$$

$$g \star u = u \star g$$

$\star$ nicht kommutativ.

Durch Fallunterscheidungen kann man nachrechnen: $\star$ assoziativ.

Also: $(D, \star)$ ist Halbgruppe.

An der Cayley-Tafel sieht man:

$$\forall x \in D: \quad i \star x = x$$

$$\forall x \in D: \quad x \star i = x.$$

Also ist i ein Neutralelement für $(D, \star)$.

<u>Def. 3.1.4</u> $(S, *)$ Halbgruppe $e \in S$

e heißt **neutrales Element** von $(S, *)$ falls

$$\forall x \in S \quad e * x = x = x * e.$$

$(S, *)$ heißt **Monoid**, falls $(S, *)$ ein Neutralelement hat.

---

z.B.: $(\mathbb{N}, \cdot)$ hat 1 als Neutralelement, aber $(\mathbb{N}, +)$ hat kein Neutralel.