

# Lineare Algebra I für die Fachrichtung Informatik Wintersemester 2023/24

---

# Komplexe Zahlen

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$  Körper

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  Unterkörper, d.h.

$\mathbb{C}$  Körpererweiterung von  $\mathbb{R}$

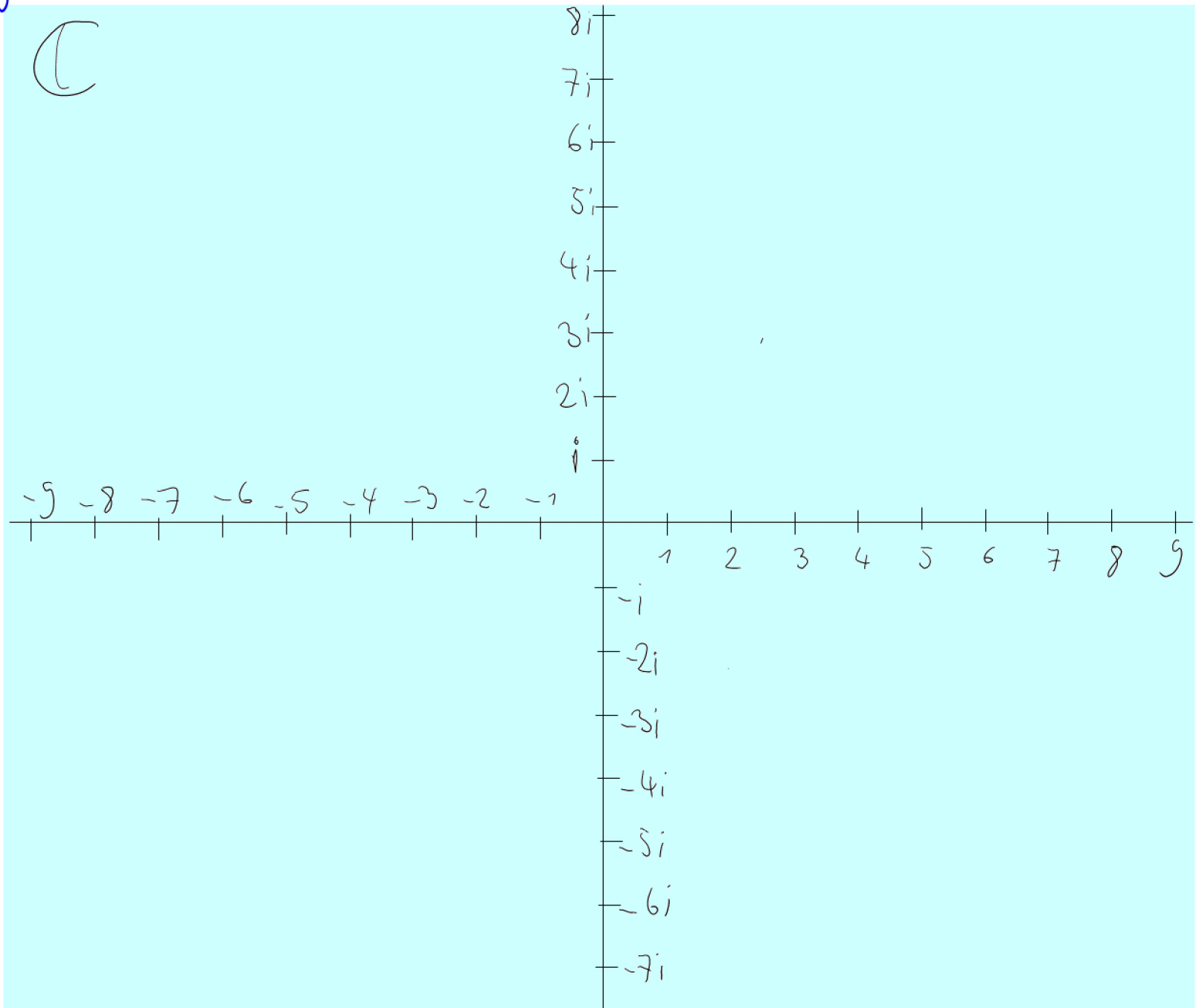
$$i \in \mathbb{C}$$

$$i^2 = -1$$

$\Rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  sind als Körper NICHT isomorph!

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{C}$

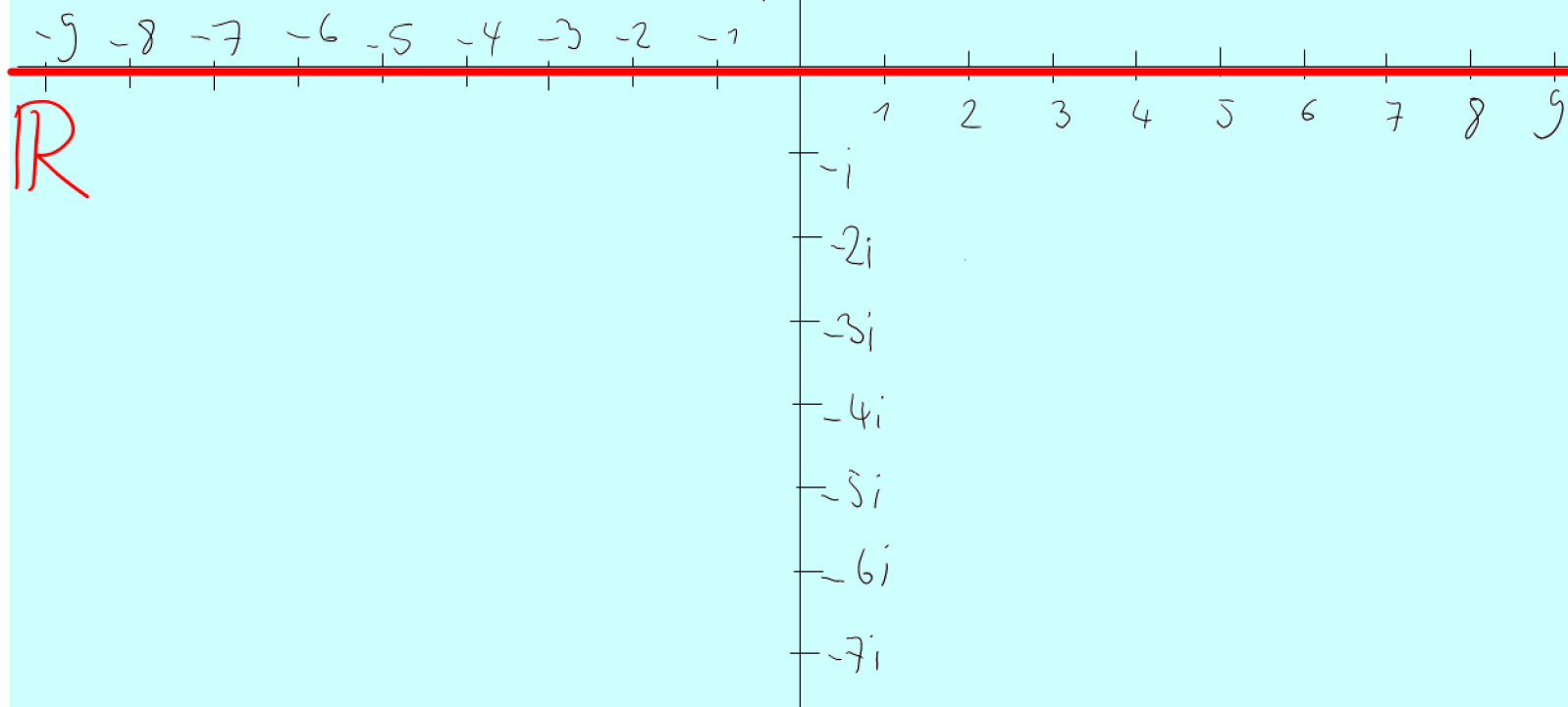


$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R}$  = reelle Achse

$\mathbb{R}$  Unterkörper von  $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$

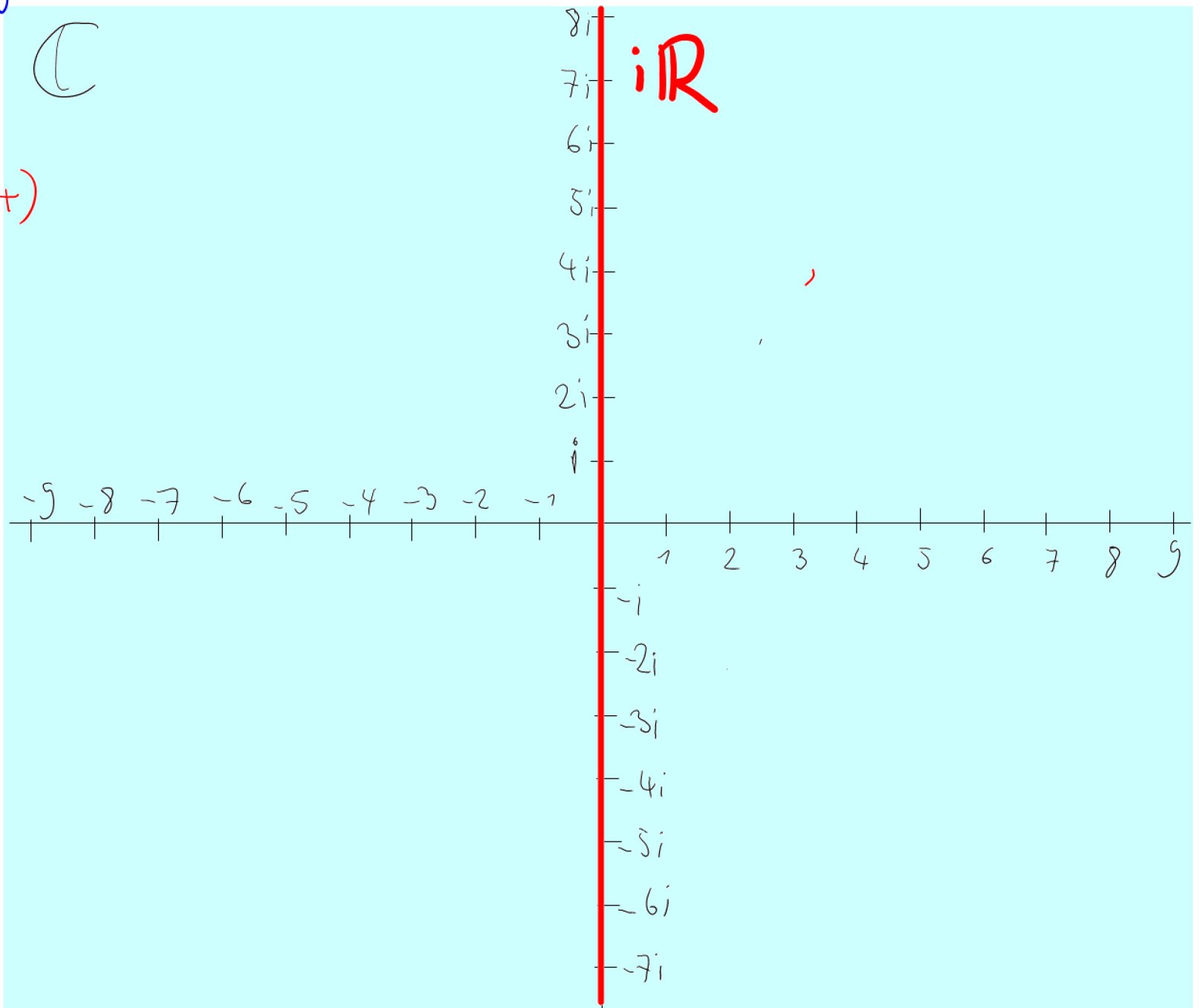


$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R}$  = reelle Achse  
 $i\mathbb{R}$  = imag. Achse

Untergruppe von  $(\mathbb{C}, +)$

$\mathbb{C}$



$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R}$  = reelle Achse  
 $i\mathbb{R}$  = imag. Achse

$$\text{Re}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Realteil}$$

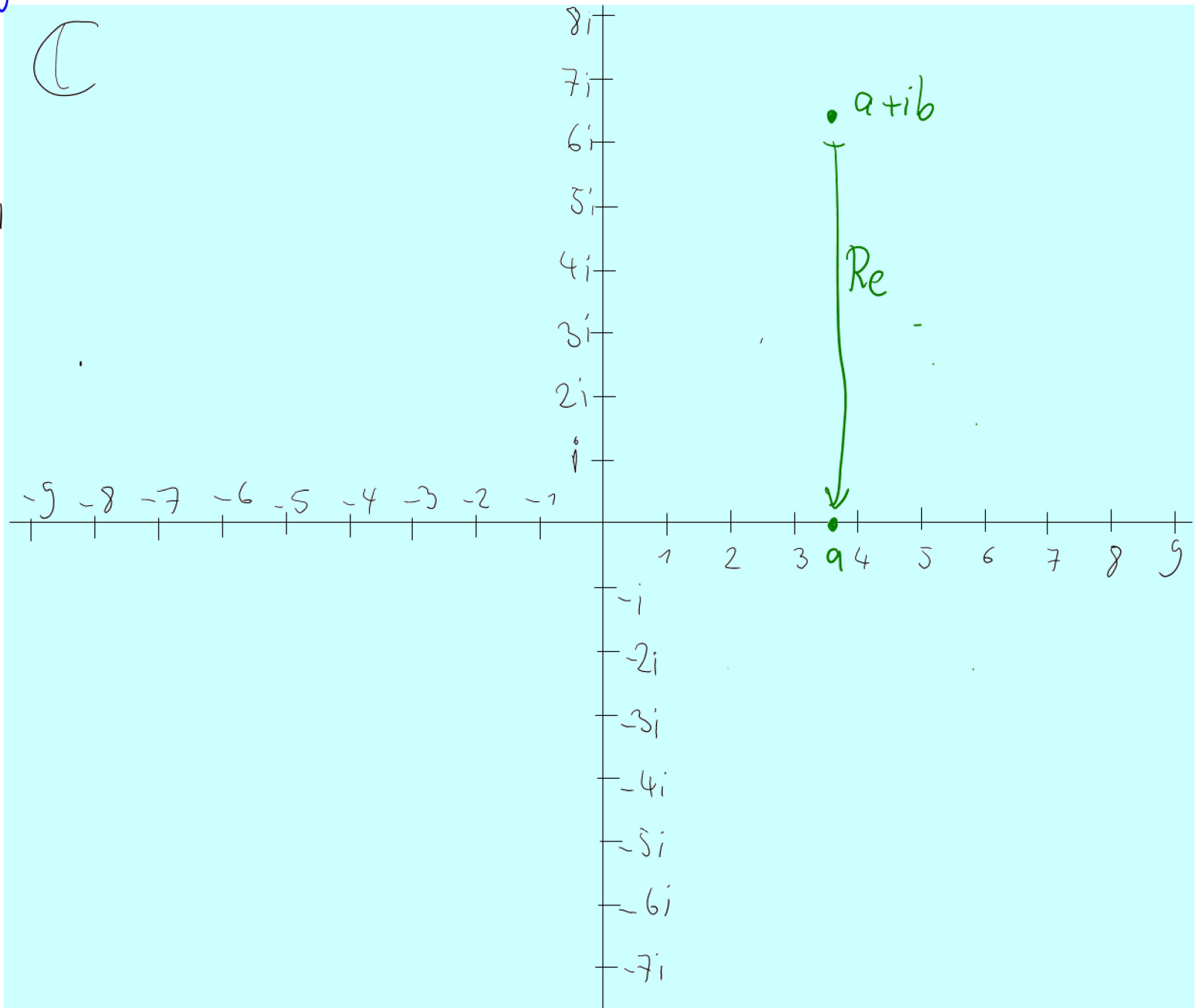
$$a + ib \mapsto a$$

Gruppenhomom.

$$(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$$

Kein Ring-Homom.

$\mathbb{C}$



$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R}$  = reelle Achse  
 $i\mathbb{R}$  = imag. Achse

$\mathbb{C}$

$$\text{Re}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Realteil}$$

$$a + ib \mapsto a$$

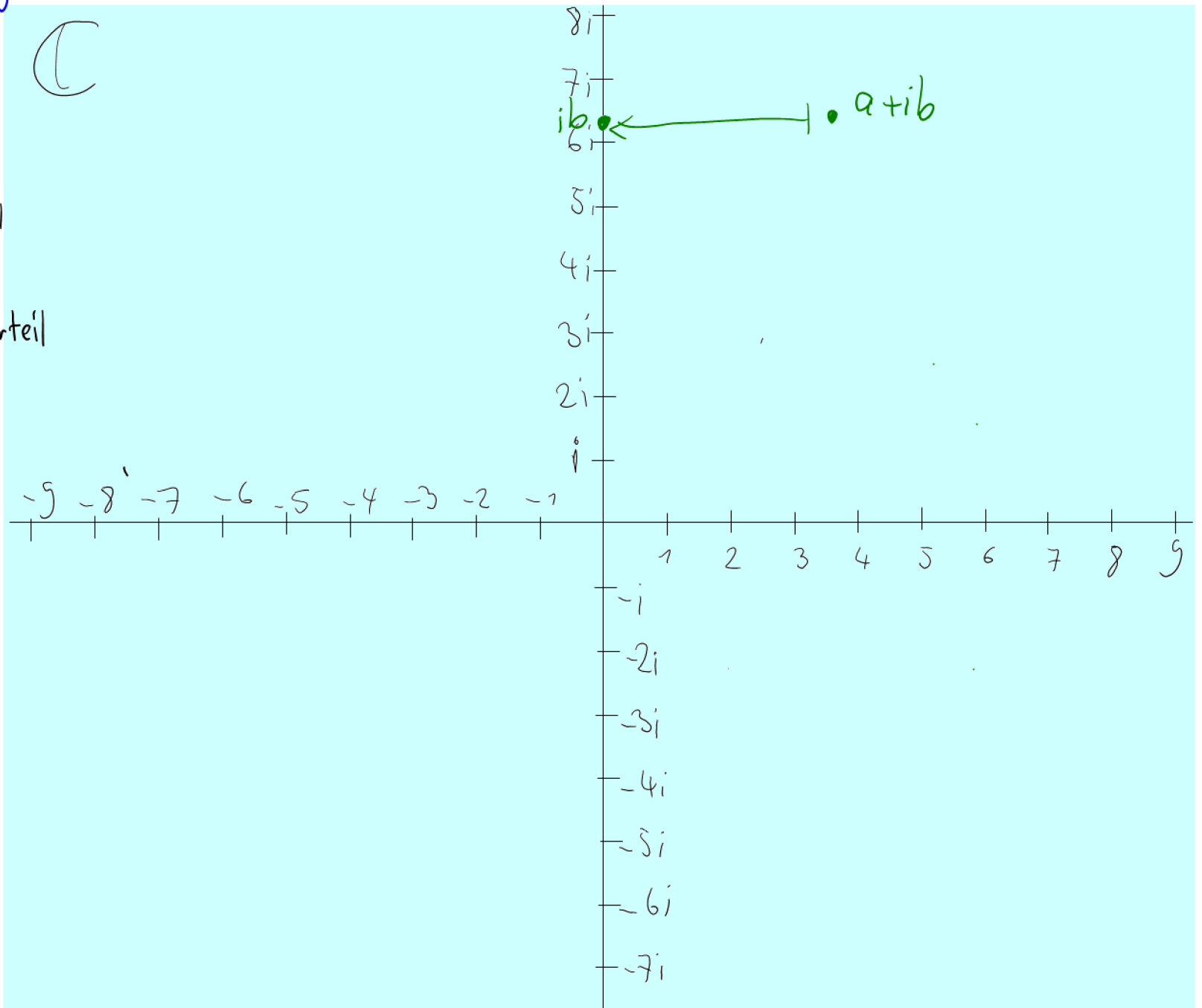
$$\text{Im}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Imaginärteil}$$

$$a + ib \mapsto b$$

Gruppenhomom.

$$(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$$

Kein Ringhomom.



$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R}$  = reelle Achse  
 $i\mathbb{R}$  = imag. Achse

$\mathbb{C}$

$$\text{Re}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Realteil}$$

$$a + ib \mapsto a$$

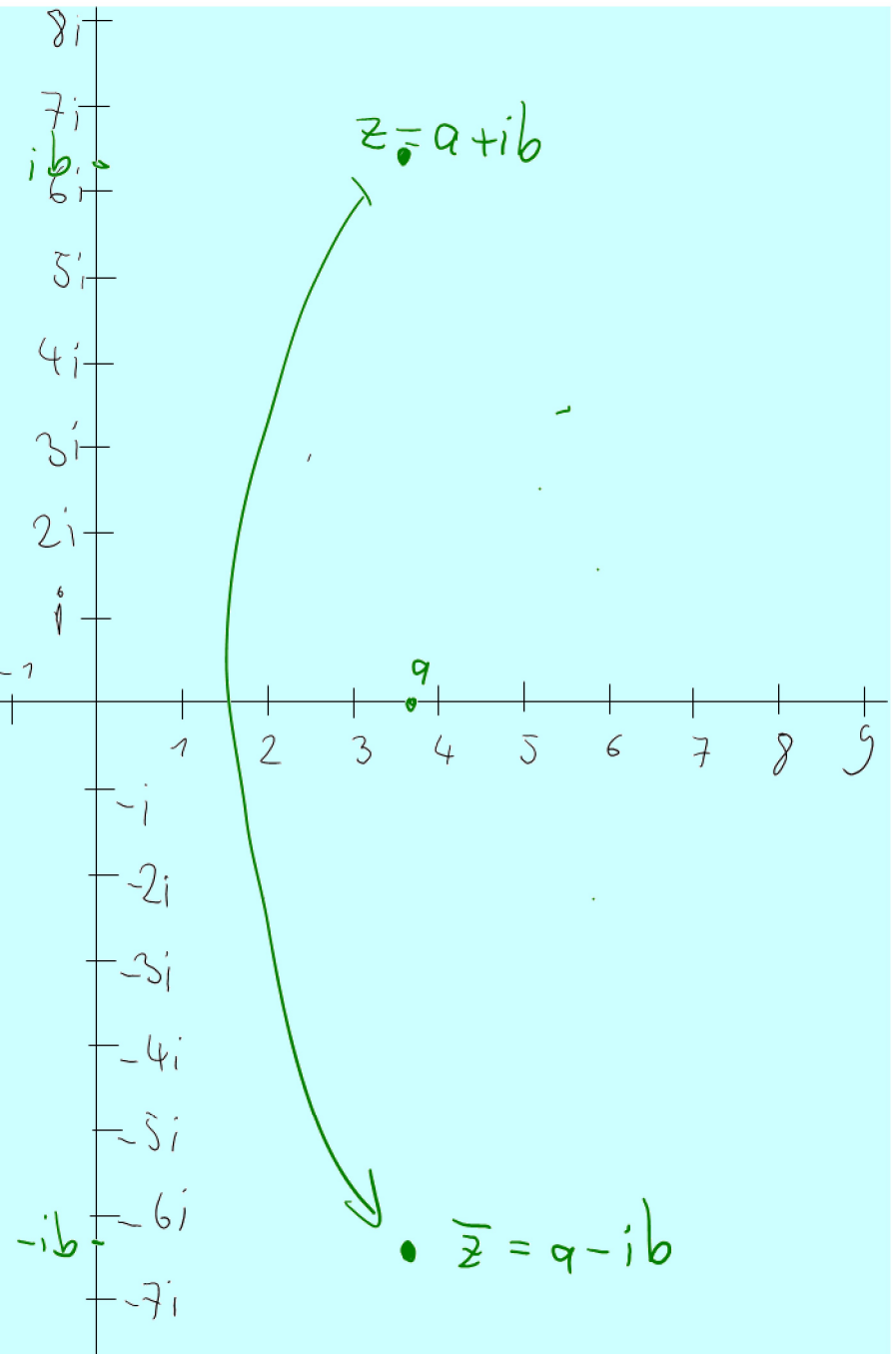
$$\text{Im}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Imaginärteil}$$

$$a + ib \mapsto b$$

$$\overline{(\cdot)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{komplexe Konjugation}$$

$$a + ib \mapsto \overline{a + ib} := a - ib$$

Körperautomorphismus



$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R}$  = reelle Achse  
 $i\mathbb{R}$  = imag. Achse

$\mathbb{C}$

$$\text{Re}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Realteil}$$

$$a + ib \mapsto a$$

$$\text{Im}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Imaginärteil}$$

$$a + ib \mapsto b$$

$$\overline{(\cdot)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{komplexe Konjugation}$$

$$a + ib \mapsto \overline{a + ib} := a - ib$$

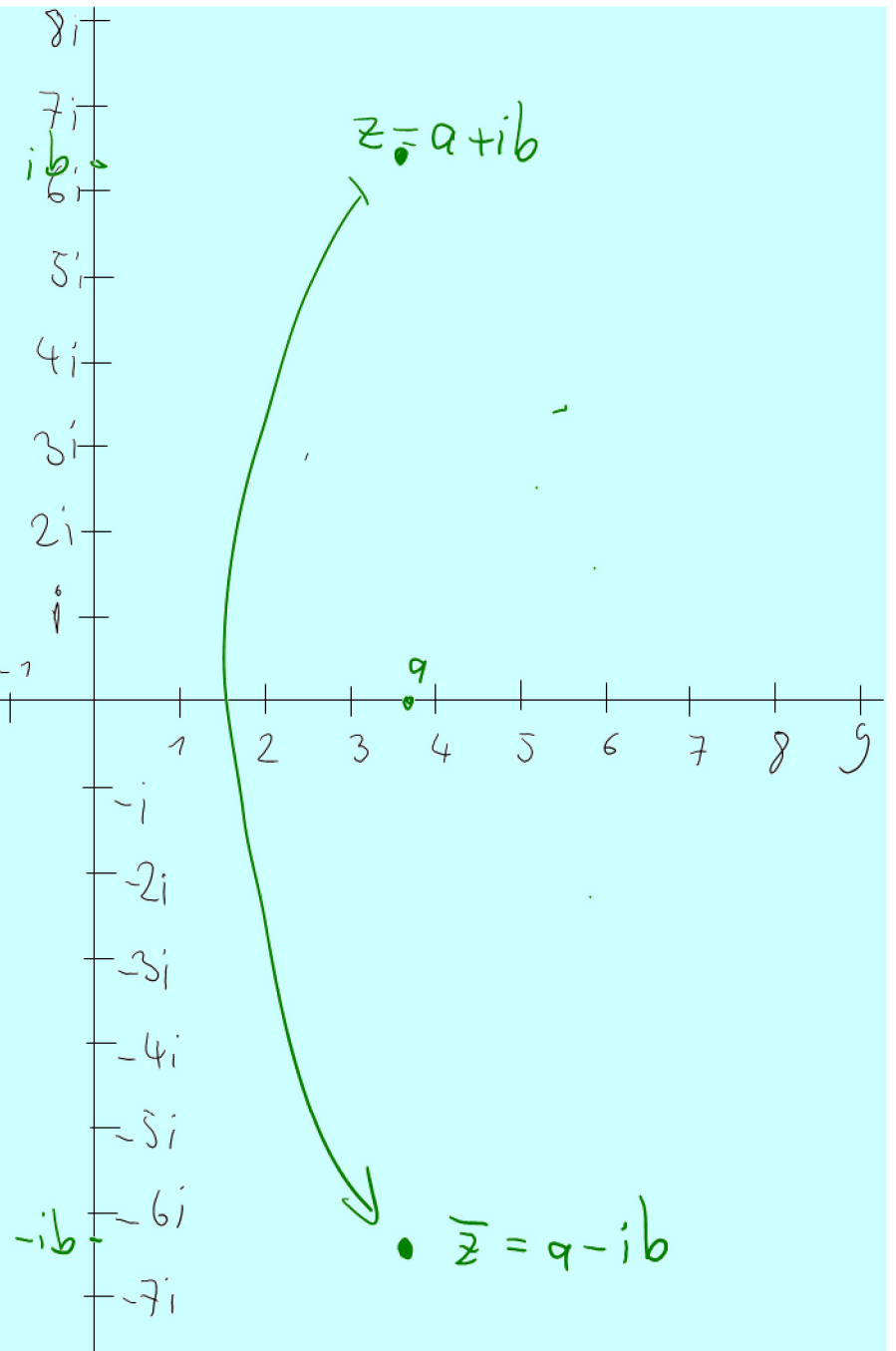
Körperautomorphismus, also

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$\overline{1} = 1$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$



$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R}$  = reelle Achse  
 $i\mathbb{R}$  = imag. Achse

$\mathbb{C}$

$$\text{Re}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Realteil}$$

$$a + ib \mapsto a$$

$$\text{Im}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Imaginärteil}$$

$$a + ib \mapsto b$$

$$\overline{(\cdot)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{komplexe Konjugation}$$

$$a + ib \mapsto \overline{a + ib} := a - ib$$

$$1.1: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty) \quad \text{Betrag}$$

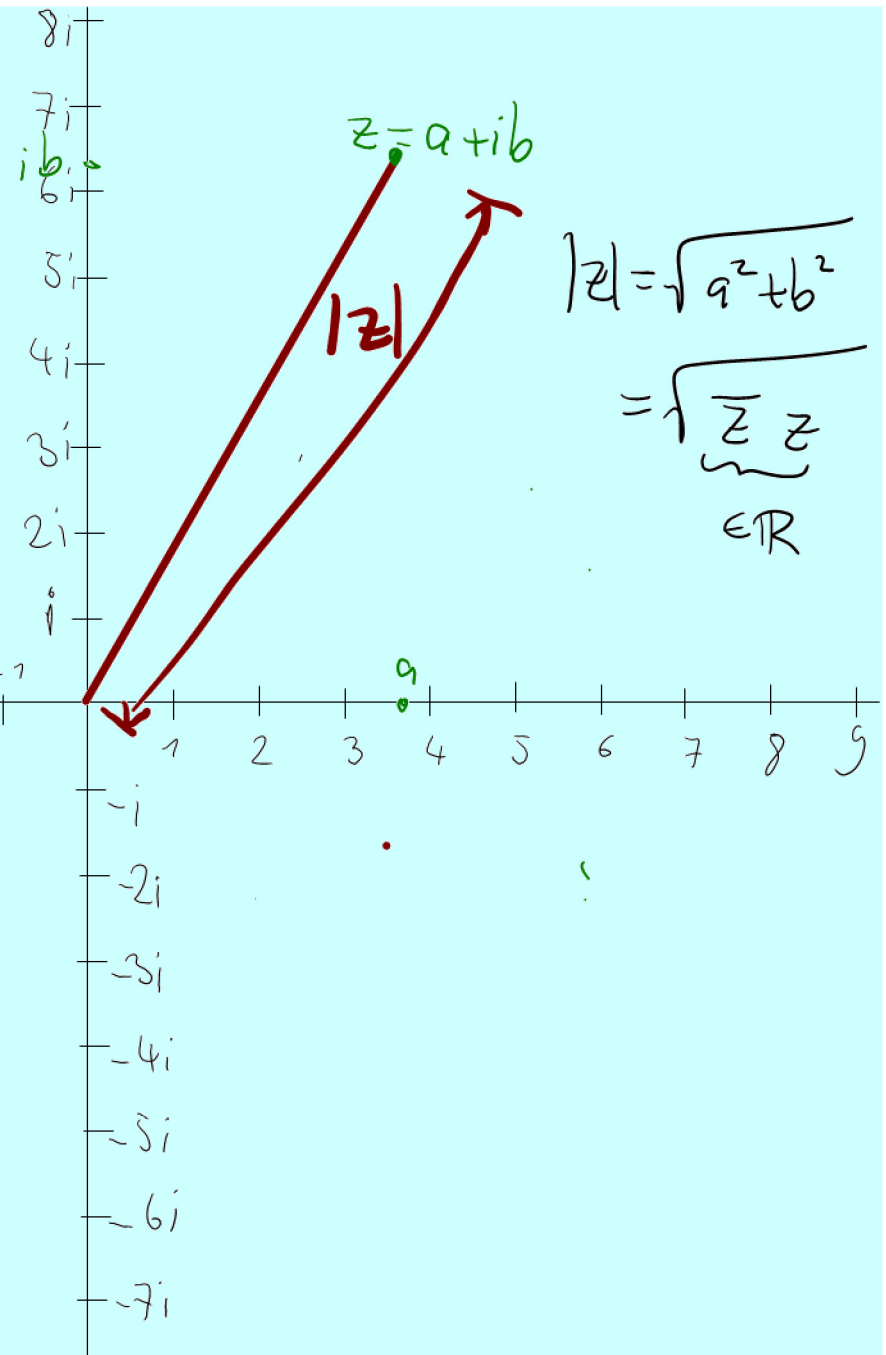
multiplikativ, d.h.

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

NICHT additiv, also

$$|z + w| \neq |z| + |w|$$

im Allgemeinen.



$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R}$  = reelle Achse  
 $i\mathbb{R}$  = imag. Achse

$\mathbb{C}$

$$\text{Re}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Realteil}$$

$$a + ib \mapsto a$$

$$\text{Im}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Imaginärteil}$$

$$a + ib \mapsto b$$

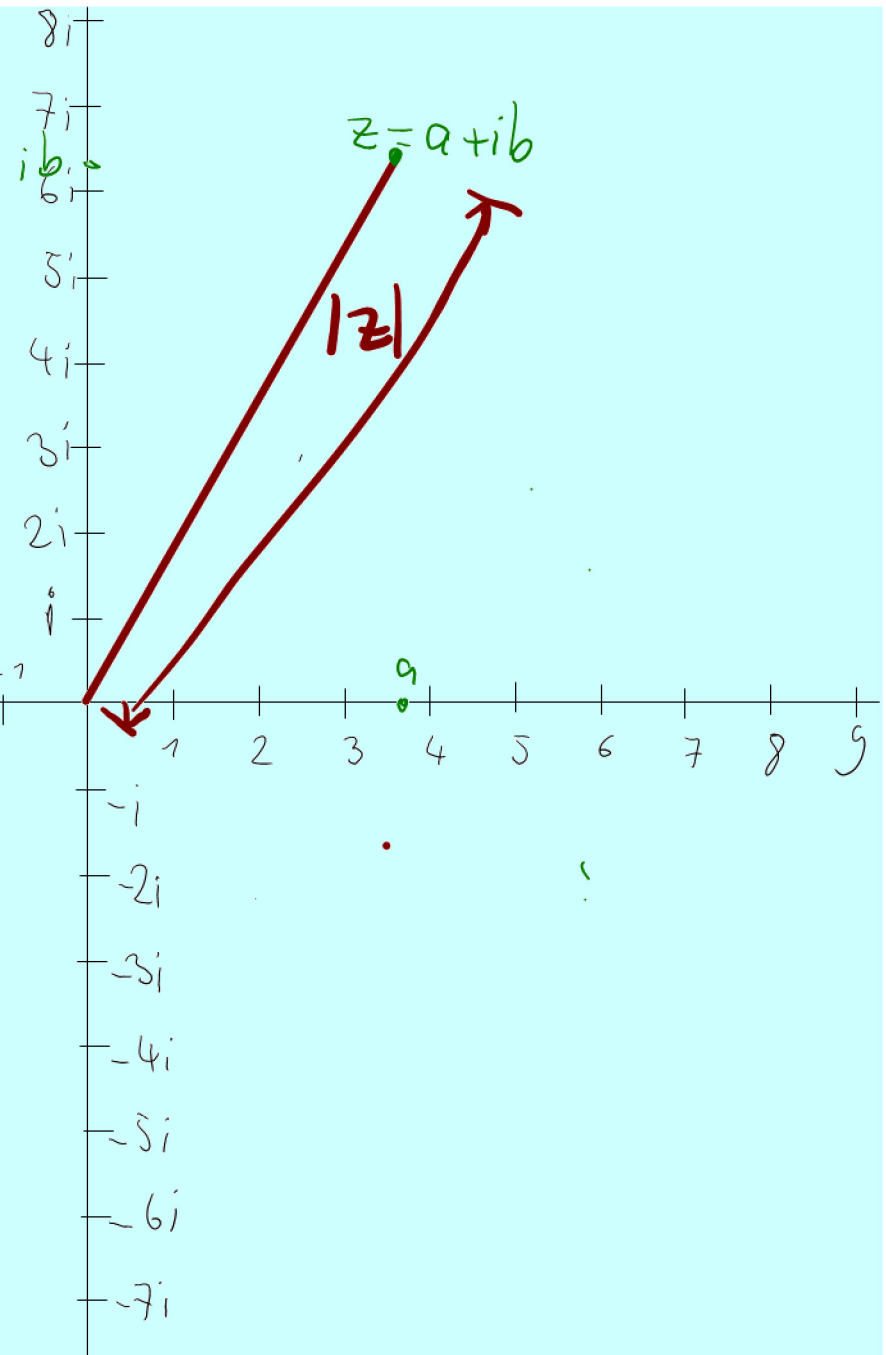
$$\overline{(\cdot)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{komplexe Konjugation}$$

$$a + ib \mapsto \overline{a + ib} := a - ib$$

$$|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty) \quad \text{Betrag}$$

$$(\mathbb{C}^{\times} \rightarrow (0, \infty)) \quad \text{Gruppenhomom.}$$

$$z \mapsto |z|$$



$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R}$  = reelle Achse  
 $i\mathbb{R}$  = imag. Achse

$\mathbb{C}$

$$\text{Re}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Realteil}$$

$$a + ib \mapsto a$$

$$\text{Im}: (\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{Imaginärteil}$$

$$a + ib \mapsto b$$

$$\overline{(\cdot)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{komplexe Konjugation}$$

$$a + ib \mapsto \overline{a + ib} := a - ib$$

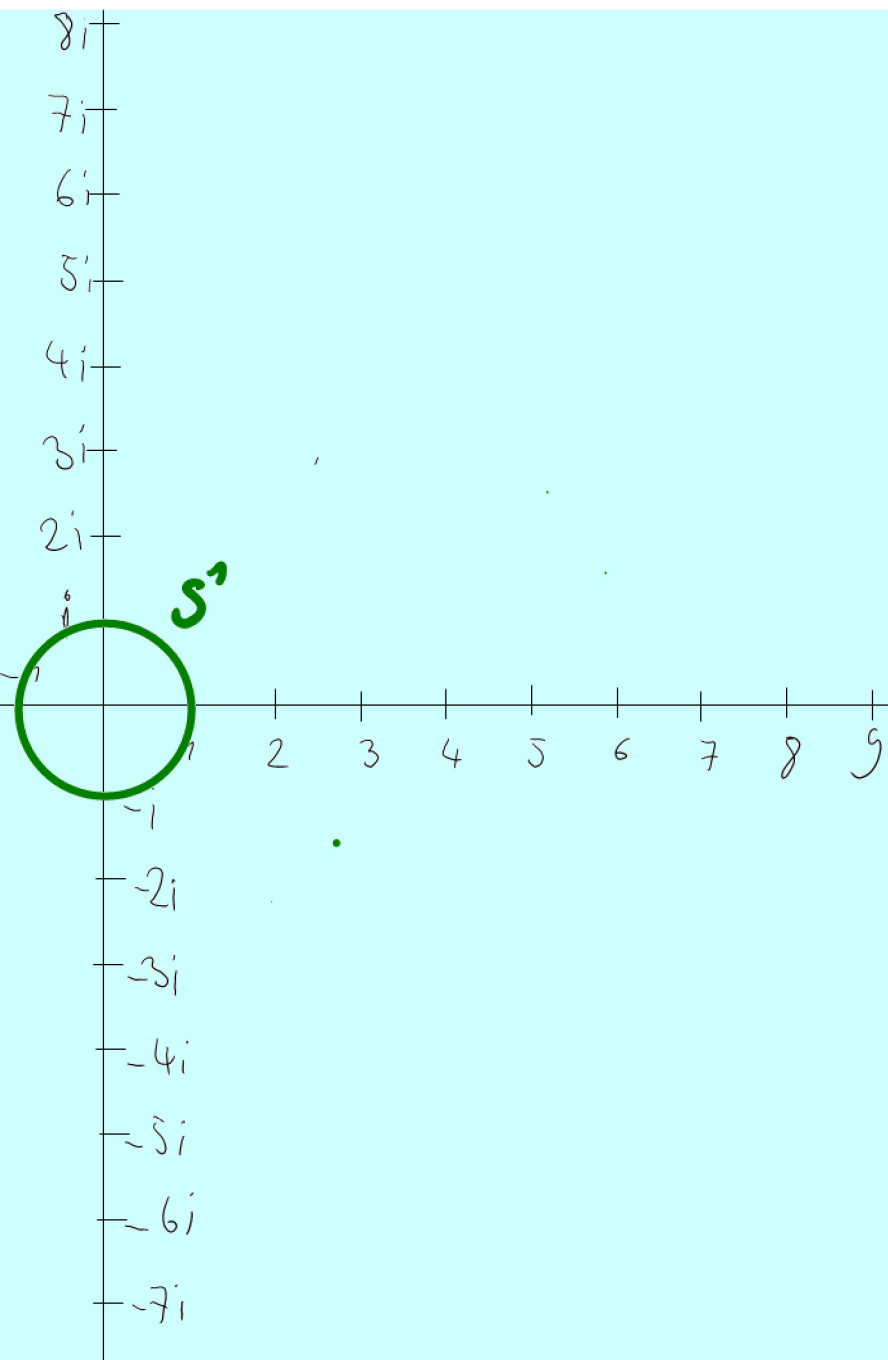
$$|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty) \quad \text{Betrag}$$

$$(\mathbb{C}^\times \rightarrow (0, \infty)) \quad \text{Gruppenhomom.}$$

$$z \mapsto |z|$$

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1 \} = \ker(|\cdot|) \quad \text{Einheitskreis}$$

Untergruppe von  $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$



$$\exp: \left( \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ z & \longmapsto & e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \end{array} \right) \quad \underline{\text{Exponentialfunktion}}$$

$$\exp: (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot) \quad \text{Gruppenhomom., d.h.}$$

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

$$\exp: \left( \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ z & \longmapsto & e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \end{array} \right) \quad \underline{\text{Exponentialfunktion}}$$

$$\exp: (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot) \quad \text{Gruppenhomom.}$$

$$\exp: (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot) \quad \text{surjektiv, d.h.}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^\times \quad \exists w \in \mathbb{C} \quad z = e^w$$

$$e^z = 1 \quad \xRightarrow{?} \quad z = 0$$

$$\exp: \left( \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ z & \longmapsto & e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \end{array} \right) \quad \underline{\text{Exponentialfunktion}}$$

$$\exp: (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot) \quad \text{Gruppenhomom.}$$

$$\exp: (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot) \quad \text{surjektiv.}$$

$$\begin{aligned} \ker(\exp) &= \{z \in \mathbb{C} \mid e^z = 1\} \\ &= 2\pi i \mathbb{Z} = \{2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exp$  NICHT injektiv.

$$\mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$$

$$x \longmapsto e^x$$

$$\cdot 6\pi i$$

$$\cdot 4\pi i$$

$$\cdot 2\pi i$$

$$\cdot -2\pi i$$

$$\cdot -4\pi i$$

$$\exp: \left( \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ z \longmapsto e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \end{array} \right) \quad \text{Exponentialfunktion}$$

$$\exp: (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot) \quad \text{Gruppenhomom.}$$

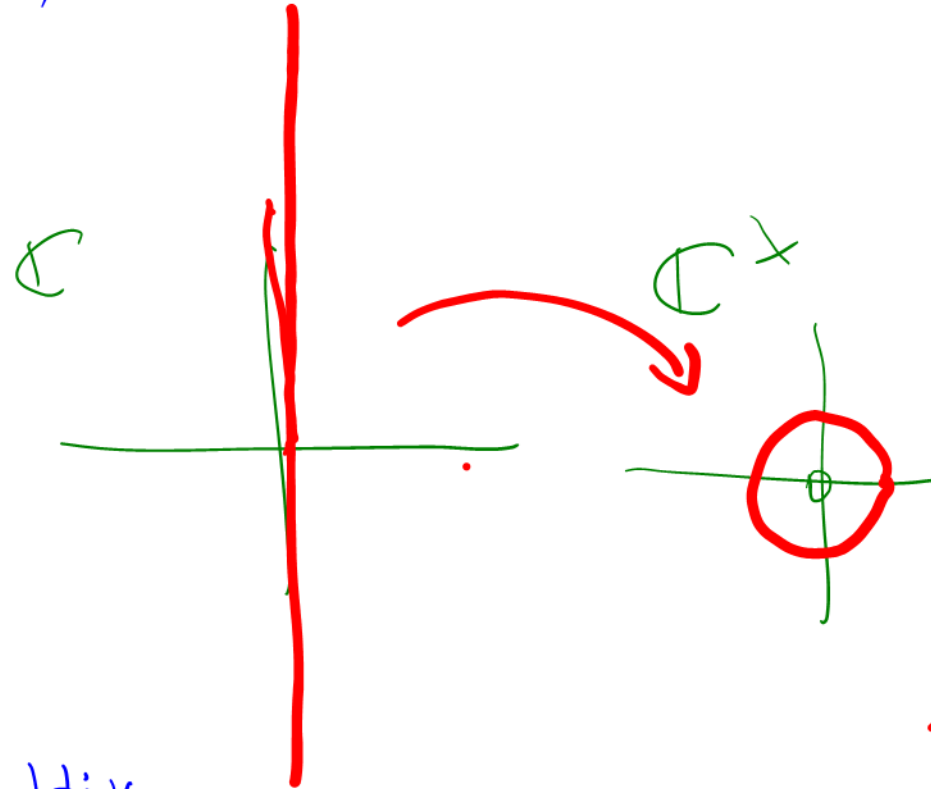
$$\exp: (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot) \quad \text{surjektiv.}$$

$$\begin{aligned} \ker(\exp) &= \{z \in \mathbb{C} \mid e^z = 1\} \\ &= 2\pi i \mathbb{Z} = \{2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exp$  NICHT injektiv.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z)) \quad \Rightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}: e^{it} \in S^1$$

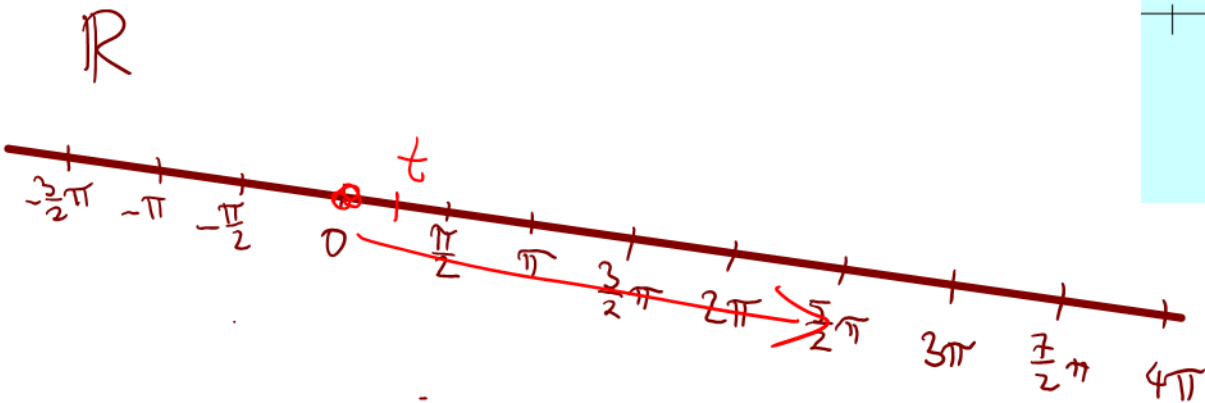
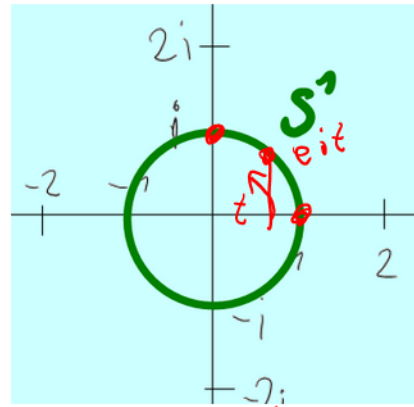


$$\varphi: (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (S^1, \cdot)$$

$$t \longmapsto e^{it}$$

Gruppenhomom.

$e^{it}$  = Punkt auf  $S^1$ ,  
den man  
erreicht, wenn  
man bei 1  
an fängt und  
gegen den  
Uhrzeigersinn  
den Weg = Winkel  
 $t$  zurücklegt.



$$\ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$$

$$e^{2\pi i} = 1$$

Euler'sche  
Formel

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^*$$

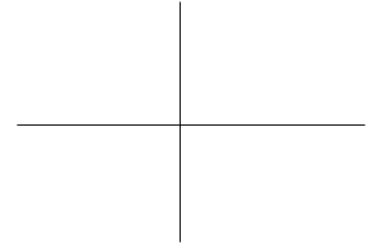
$$\exists t \in \mathbb{R}$$

$$z = |z| e^{it}$$

(Polardarstellung)

$|z|$  = Betrag

$t$  = Argument, eindeutig modulo  $2\pi$



$$z_1 = |z_1| e^{it_1}$$

$$z_2 = |z_2| e^{it_2}$$

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{it_1} |z_2| e^{it_2} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(t_1+t_2)}$$

$$m \in \mathbb{N},$$

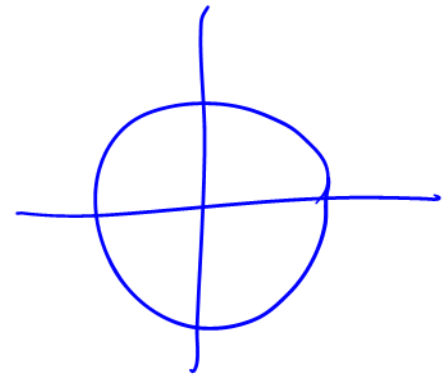
Finde alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^m = 1$

$C_m = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^m = 1 \}$  Menge der komplexen  
m-ten Einheitswurzeln

$$|z^m| = |1|$$

$$\Rightarrow |z|^m = 1 \text{ in } \mathbb{R} \Rightarrow |z| = 1.$$

$$\Rightarrow z \in S^1. \quad C_m \subseteq S^1.$$



$$z \in C_m, \quad z^m = 1$$

$$z = e^{it}$$

$$t \in \mathbb{R}.$$

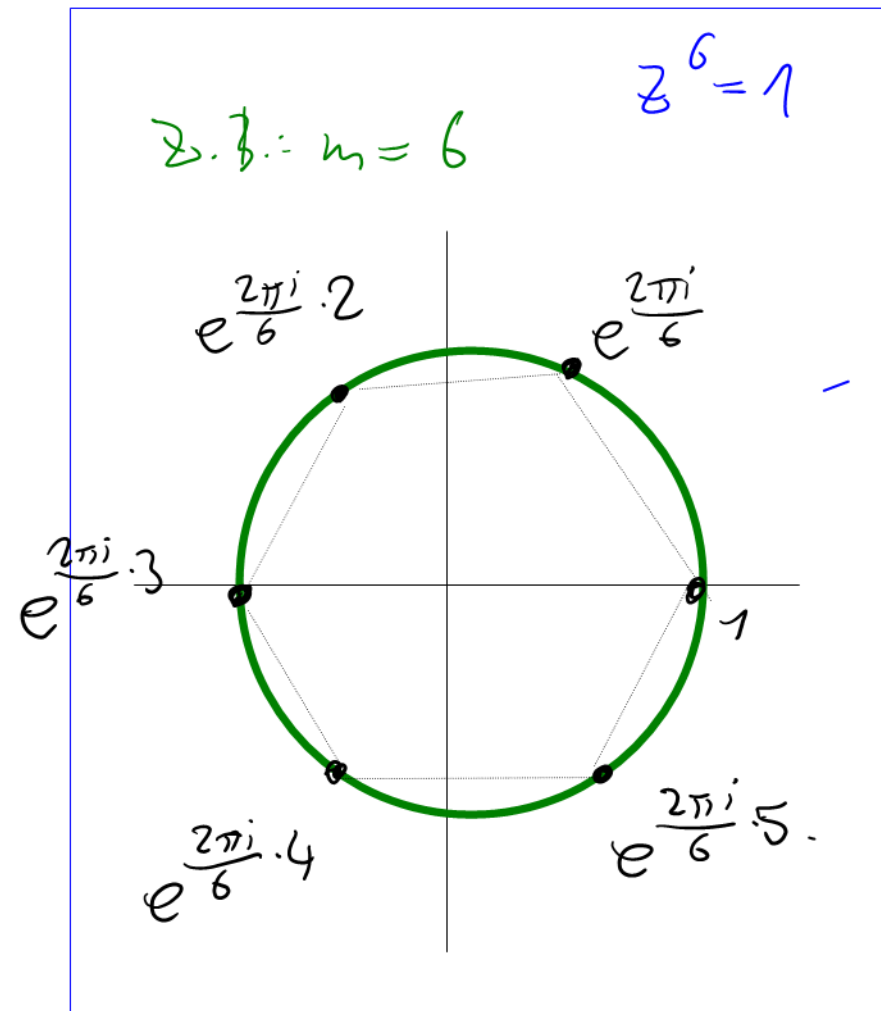
$$z^m = e^{imt} = 1$$

$$imt \in \ker(\exp) = 2\pi i \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \underline{\exists k \in \mathbb{Z}:} \quad imt = 2\pi i k$$

$$t = \frac{2\pi}{m} \cdot k$$

$$C_m = \left\{ e^{i \frac{2\pi}{m} k} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{i \frac{2\pi}{m} k} \mid k \in \{0, \dots, m-1\} \right\}$$



$$\left( \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ z & \longmapsto & z^m \end{array} \right)$$

Gruppenhomo.

$$\begin{aligned} ((zw)^m &= zwzw \dots zw \\ &= zz \dots zw \dots w \\ &= z^m w^m) \end{aligned}$$

$$C_m = \ker(\quad) = \{ z \in \mathbb{C}^\times \mid z^m = 1 \}$$

multiplikative Gruppe.

$$\left( \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (C_m, \cdot) \\ \uparrow [k]_m & \longmapsto & \uparrow e^{\frac{2\pi i}{m} \cdot k} \\ \text{additiv} & \text{zyklische Gruppen} & \text{mult. Schreibweise} \end{array} \right)$$

Satz 3.5.10:

# Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_k X^k$$

mit  $a_j \in \mathbb{C}$ ;  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k \neq 0$

hat mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$   
 $\mathbb{R}$   
 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$   
 $\mathbb{Q}$

Def: Ein Körper  $K$

heißt ~~algebraisch~~ abgeschlossen,

wenn jedes nicht konstante Polynom  $p$   
in  $K$  eine Nullstelle besitzt.

z.B.: •  $\mathbb{C}$  ist algebraisch abgeschlossen.  
(Fundamentalsatz)

•  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  nicht algebraisch abg.

Anm: Mehr zu Polynomen später...

Anm:  $\exp_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\times}, \cdot)$  injektiv, nicht surjektiv.

$\exp_{\mathbb{C}}: (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^{\times}, \cdot)$  surjektiv, nicht injektiv.

$\nexists \varphi: (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}^{\times}, \cdot)$ ,  $\varphi$  Homom.,  $\varphi$  nicht konstant.

$\forall K$  Körper  $(K, +) \not\cong (K^{\times}, \cdot)$  als Gruppe.

# Kapitel 4

## Vektorräume & lineare Abbildungen

Halbgruppen

Monoide

Gruppen

Ringe, z.B.  $\mathbb{R}^{2 \times 2}, \dots$

Körper  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ -Vektorräume

$\mathbb{R}$ -Vektorräume

$\mathbb{C}$ -Vektorräume

$\mathbb{F}_2$ -Vektorräume

$\mathbb{F}_4$ -Vektorräume

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -Vektorräume

# Def. 4.1.1 Vektorraum über $K$

Es sei  $K$  ein Körper. (z.B.  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ )

Ein  $K$ -Vektorraum

$$(V, +, \cdot)$$

ist eine Menge  $V$ , zusammen mit zwei Operationen

$$+: V \times V \longrightarrow V \quad (\text{Addition})$$

$$\cdot: K \times V \longrightarrow V \quad (\text{skalare Multiplikation}),$$

so dass folgende Regeln gelten:

(i)  $(V, +)$  ist eine abelsche Gruppe

$$(ii) \forall \lambda \in K, v, w \in V: \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$$

$$(iii) \forall \lambda, \mu \in K; v \in V: (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$$

$$(iv) \forall \lambda, \mu \in K; v \in V: (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$$

$$(v) \forall v \in V: 1_K \cdot v = v$$

Vektor: Element aus  $V$

Skalar: Element aus  $K$

$0$  = Neutralelement von  $(V, +)$

= Nullvektor

$= 0_v$

$-x$  = Inverse von  $x \in (V, +)$

Punkt- vor Strichrechnung

Notation:

$$V = (V, +, \cdot)$$

$$(K, +, \cdot)$$

Beispiele:

•  $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $n \in \mathbb{N}$

•  $(\mathbb{K}^{m \times n}, +, \cdot)$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $m, n \in \mathbb{N}$   
(Lemma 2.27)

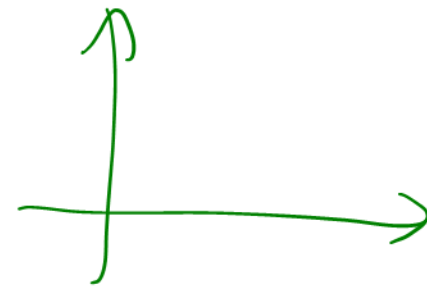
•  $(\mathbb{K} = \mathbb{K}^1 = \mathbb{K}^{1 \times 1}, +, \cdot)$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum

•  $\{0\}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{K}^0 := \{0\}$ .

•  $\mathcal{J}$  Menge  $\mathbb{K}^{\mathcal{J}} = \{f: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{K}\}$  mit punkt. Add.,  
punkt. skalare Mult.  
ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

Anm:  $\mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^{\{1, \dots, n\}}$   
 $\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \uparrow \rightarrow$

- $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$



$$\sin \in V$$

$$\cos \in V$$

$$2\sin + 7\cos \in V.$$

- $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} =$  Menge aller Folgen in  $\mathbb{R}$ .  
...

- $V$  Vektorraum über  $\mathbb{K}$

$\mathcal{I}$  Menge

$$V^{\mathcal{I}} = \{f: \mathcal{I} \rightarrow V\} \text{ Vektorwertige Funktionen.}$$

z.B.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$   
 $V = \mathbb{R}^3$

## Wichtiges Beispiel:

VR = Vektorraum.

$K$  Körper (z.B.  $\mathbb{R}$ )

$L$  Körpererweiterung  
von  $K$  (z.B.  $\mathbb{C}$ )

$$+ : L \times L \rightarrow L$$

$$\cdot : K \times L \rightarrow L$$

$\leadsto L$  Vektorraum über  $K$ .

z.B.:  $\mathbb{C}$  sind  $\mathbb{R}$ -VR

$\mathbb{R}$  sind  $\mathbb{Q}$ -VR

$\mathbb{C}$  sind  $\mathbb{Q}$ -VR

$\mathbb{F}_4$  ist  $\mathbb{F}_2$ -VR.

### Lemma 4.1.5

Sei  $K$  ein Körper.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.

$$(i) \quad \lambda v = 0_v \iff (\lambda = 0_K \text{ oder } v = 0_v)$$

$$(ii) \quad (-1_K) \cdot v = -v$$

---

Bw. (ii) Sei  $v \in V$ .

$$f: \begin{pmatrix} (K, +) \longrightarrow (V, +) \\ \lambda \longmapsto \lambda v \end{pmatrix} \text{ Gruppenhomom. nach (ii).}$$

$$f(-\lambda) = -f(\lambda)$$

$$(-\lambda) \cdot v = -(\lambda v)$$

$$\lambda=1 \quad (-1) \cdot v = -(\underbrace{1 \cdot v}_{=v}) = -v.$$

(i)

“ $\Leftarrow$ ”

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda = 0. \\ \lambda v = f(0) = 0 \end{array}}$$

(weil Gruppenhomo. 0 auf 0 abbildet)

$$\left( \text{z.z.: } \lambda v = 0_v \Leftrightarrow (\lambda = 0_K \text{ oder } v = 0_v) \right)$$

$$v = 0.$$

$$g: \begin{pmatrix} V \longrightarrow V \\ w \longmapsto \lambda \cdot w \end{pmatrix} \text{ Gruppenhomo. nach (ii).}$$

$$\lambda \cdot 0 = g(0) = 0.$$

$$\text{“}\Rightarrow\text{”}: \lambda v = 0$$

$$\left( \text{z.z.: } \lambda = 0 \text{ oder } v = 0 \right)$$

$$\text{1. Fall: } \lambda = 0; \quad \checkmark$$

$$\text{2. Fall: } \lambda \neq 0;$$

$$\left( \text{z.z.: } v = 0 \right)$$

$$\lambda \in K \text{ K\"orper} \Rightarrow \exists \lambda^{-1} \in K.$$
$$\lambda \neq 0$$

$$\lambda v = 0_v$$

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda v) = \underbrace{\lambda^{-1} \cdot 0_v}_{= 0_v}$$

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = 0_v$$

$$\stackrel{(iv)}{\implies} \underbrace{\left( \lambda^{-1} \lambda \right)}_{1_K} \cdot v = 0$$

$$1_K \cdot v = 0$$

$$\stackrel{(v)}{\implies} v = 0 \quad .$$

Wie bei anderen alg. Strukturen auch, definieren wir

## Untervektorräume

---

Def 4.1.6

$K$  Körper

$V$  Vektorraum über  $K$ .

$U \subseteq V$  heiße  $K$ -Untervektorraum, wenn

- $0_V \in U$
- $\forall v, w \in U : v + w \in U$
- $\forall v \in U, \lambda \in K : \lambda v \in U$ .

Lemma 4.1.7  $K$  Körper

$V$  Vektorraum über  $K$

$U \subseteq V$  Untervektorraum.

$\Rightarrow (U, +|_U, \cdot|_U)$  Vektorraum.

Bw:  $0 \in U$ .

$\forall v, w \in U \quad v + w \in U$

$+: U \times U \rightarrow U$  assoziativ,

$(U, +)$  kommutatives  
Monoid

$v \in U, \quad \text{z.z: } \exists w \in U : v + w = 0.$

$w = (-1)v \in U \Rightarrow (U, +)$  abelsche Gruppe.



z.B.: (a)  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $K$  Körper

$$A \in K^{m \times n}$$

$$\ker A = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$$

Untervektorraum von  $K^n$ .

---

(b)  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K$  Körper

$$\{A \in K^{n \times n} \mid A^T = A\} \text{ Untervektorraum von } K^{n \times n}.$$

symmetrische Matrizen

(c)  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$   $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von  $\mathbb{C}$

---

$\mathbb{Q}$  Körpererw. von  $K \Rightarrow K \subseteq \mathbb{Q}$  Untervektorraum.

(a)  $i\mathbb{R} \subseteq \Phi$   $\mathbb{R}$ -Untervektorraum.

kein  $\Phi$ -Untervektorraum.

---

$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b. \quad [a, b] \subseteq \mathbb{R}$

$$C([a, b], \mathbb{R}) = \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \} \subseteq \mathbb{R}^{[a, b]}$$

Untervektorraum.