Karlsruher Institut für Technologie

Lineare Algebra I für die Fachrichtung Informatik Wintersemester 2023/24

Gruppen $(G, *)$	Ringe $(R, +, \cdot)$	Körper $(K, +, \cdot)$	$\mathbb{K}$-Vektorräume $(V, +, \cdot)$ ($\mathbb{K}$ Körper)
Untergruppen	Unterringe	Unterkörper	$\mathbb{K}$-Untervektorräume
Gruppenhomom. -endom. -isom. -autom.	Ringhomom. -endom. -isom. -autom.	Körperhomom. -endom. -isom. -autom.	$\mathbb{K}$-Vektorraumhomom. ($\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}$-lineare Abb.) -endom. -isom. -autom.

Wichtige Beispiele für $\mathbb{K}$-VR:

Funktionenräume

J Menge, $\mathbb{K}$ Körper

$$\mathbb{K}^J = \{ f \mid f : J \to \mathbb{K} \text{ Funktion} \}$$

$V = \mathbb{K}^J$

$+$ = punktw. Addition

$\cdot$ = punktw. skalare Multiplikation

Körpererweiterungen

$\mathbb{L}$ Körpererweiterung von $\mathbb{K}$

$V = \mathbb{L}$

$+$ = Addition in $\mathbb{L}$

$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$

Multiplikation in $\mathbb{L}$

W $\mathbb{K}$-Vektorraum $(\mathbb{K} = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R}^3)$

$$W^J = \{ f \mid J \to W \text{ vektorwertige Abb.} \}$$

z.B.: $J = \{1,\dots,n\}$

$\mathbb{K}^J \qquad \mathbb{K}^n$

$J = \{(i,j) \mid i \in \{1,\dots,m\},\ j \in \{1,\dots,n\}\}$
$= \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$

$\mathbb{K}^J \qquad \mathbb{K}^{m\times n}$

Beispiele für UVR von $\mathbb{K}$-VR.

$$C^1([a,b],\mathbb{R}) \subseteq C([a,b],\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{[a,b]}$$

$\mathbb{R}$-UVR $\qquad$ $\mathbb{R}$-UVR

...

z.B.: $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}}$ $\qquad J = \mathbb{N}$

$$\ell^1(\mathbb{N}) \underset{\text{UVR}}{\subsetneq} c_0(\mathbb{N}) \underset{\text{UVR}}{\subseteq} c(\mathbb{N}) \underset{\text{UVR}}{\subseteq} \ell^\infty(\mathbb{N}) \underset{\text{UVR}}{\subseteq} \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

Nullfolgen

Konvergente Folgen

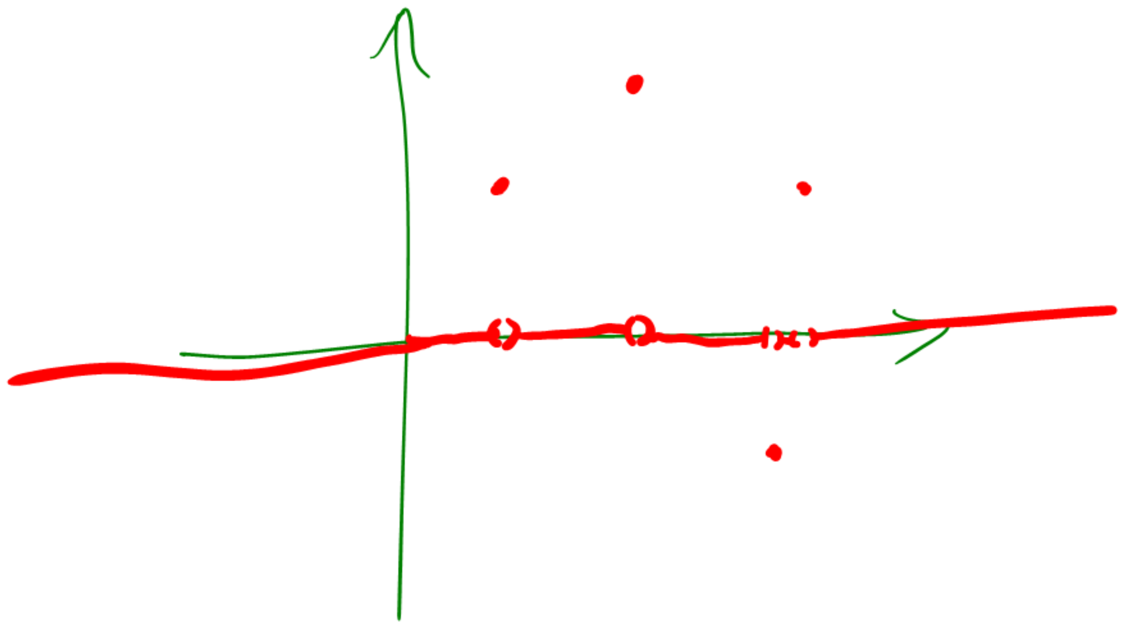
beschr. Folgen

$$\ell^1(\mathbb{N}) := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ konvergent} \right\}$$

$\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$

J Menge, $\mathbb{K}$ Körper

$$\mathbb{K}^{(J)} := \{ f \in \mathbb{K}^J \mid f \text{ ist nur an endlich vielen Stellen ungleich } 0 \} \underset{\text{UVR}}{\subseteq} \mathbb{K}^J$$



Wenn J endlich

Dann $\mathbb{K}^{(J)} = \mathbb{K}^J$.

Sonst: $\mathbb{K}^{(J)} \subsetneq \mathbb{K}^J$

Def. 4.1.9 (affine Unterraum)

Sei $\mathbb{K}$ Körper

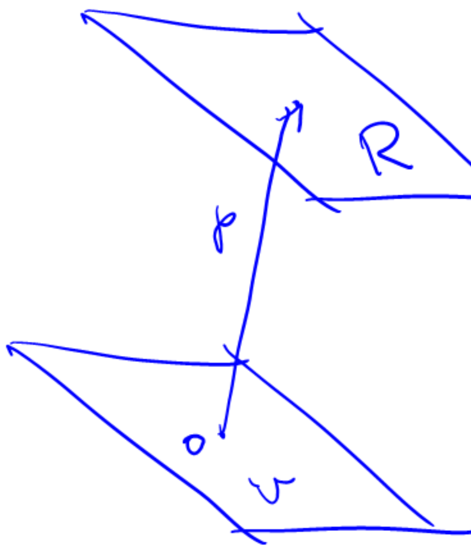
V $\mathbb{K}$-Vektorraum

$R \subseteq V$ heißt $(\mathbb{K}\text{-})$ affine Unterraum von V, wenn

$\exists p \in V$ Fußpunkt / Stützvektoren

$\exists U \subseteq V$ $\mathbb{K}$-UVR

$$R = p + U = \{ p + u \mid u \in U \}$$



Verallgemeinerung von Def 2.4.2

Satz 4.1.11 (Verallgemeinerung von 2.4.8) $\mathbb{K}$ Körper

V $\mathbb{K}$-VR.

$R \subseteq V$.

(i) R ist affiner Unterraum

(ii) $R \neq \emptyset$ und $\forall x, y, z \in R, \lambda \in \mathbb{K}: \ x + \lambda(y - z) \in R$

(iii) $R \neq \emptyset$ und abgeschlossen unter endlichen Affinkombinationen

$$\left.\begin{array}{l} v_j \in R \\ \lambda_j \in \mathbb{K} \\ \sum \lambda_j = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum \lambda_j v_j \in R$$

Bw: identisch mit 2.4.8.

Achtung: Charakterisierung durch „Geraden" funktioniert NICHT mehr.

z.B.: (a) $\mathbb{K}$ Körper, $m,n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$.

$\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$ Lösungsmenge des LGS

ist entweder $\emptyset$

oder ein affiner Unterraum. $\boxed{x_0 + \underbrace{\ker A}_{\text{Lösungsmenge des homog. LGS.}}}$

(b) $f \in C([a,b], \mathbb{R})$.

$\{g \in C^1([a,b], \mathbb{R}) : g' = f\}$ affiner Unterraum von $C^1([a,b], \mathbb{R})$.

$g_0 +$ konstante

allgemeine Lösungsmenge des "homogenen" Problems $g' = 0$.

(c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$a \in \mathbb{K}$.

$\{ (x_n)_n \mid \lim_{n\to\infty} x_n = a \}$ affiner Unterraum von $c \subseteq \ell^\infty \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$= (a)_n + c_0$

Konstante a-Folge

Menge der Nullfolgen.

Menge der konvergenten Folgen

Def 4.1.13 Lineare Abbildungen

$\mathbb{K}$ Körper

V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

$\varphi : V \longrightarrow W$ heißt $\mathbb{K}$-Vektorraum-Homomorphismus

oder Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen

$\mathbb{K}$-lineare Abbildung, wenn

$$\boxed{\forall x, y \in V \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\forall x \in V \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\end{matrix} \quad \varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi(x)}$$

φ $\mathbb{K}$-linear $\Rightarrow$ $\varphi : (V, +) \longrightarrow (W, +)$ ist Gruppenhomom.

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix}\varphi(0_V) = 0_W . \\ \varphi(-v) = -\varphi(v) .\end{matrix}}$

φ Isom. von $\mathbb{K}$-VR, wenn φ bijektiv ist.

$$V \underset{\varphi^{-1}}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} W$$

Wenn es einen Isomorphismus von V nach W, dann sagen wir V und W sind isomorph.

$$\boxed{V \cong W}$$

$$\boxed{V \cong_{\mathbb{K}} W}$$

$\varphi : V \to V$ linear nennt man auch Endomorphismus.

Automorph. $:\Longleftrightarrow$ (Endom und Isomorphismus).

Lemma 4.1.14

$\mathbb{K}$ Körper

V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$.

$\varphi : V \longrightarrow W$ $\mathbb{K}$-lineare Abb.

(a) $\varphi(0_V) = 0_W$

(b) $U \subseteq V$ $\mathbb{K}$-Untervektorraum von V

$\Longrightarrow \varphi(U)$ $\mathbb{K}$-Untervektorraum von W

Insbesondere $\mathrm{Bild}(\varphi) = \varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\}$ UVR von W.

(c) $U \subseteq W$ $\mathbb{K}$-UVR von W

$\Longrightarrow \varphi^{-1}(U)$ $\mathbb{K}$-UVR von V

Insbesondere $\ker \varphi := \varphi^{-1}(\{0\})$ UVR von V.

Bw: (a) φ Gruppenhom. ✓

(b) $U \subseteq V$ UVR

$\Rightarrow$ U Untergruppe von $(V,+)$

$\Rightarrow$ $\varphi(U)$ Untergruppe von W.

$$\varphi: \begin{matrix} V \\ \cup \\ U \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} W \\ \cup \\ \varphi(U) \end{matrix}$$

(z.z: $\varphi(U)$ abg. unter skalarer Mult, d.h.

$\forall y \in \varphi(U)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda y \in \varphi(U)$)

Sei $y \in \varphi(U)$.

$\exists u \in U$: $y = \varphi(u)$.

$$\lambda y = \lambda \varphi(u) = \varphi(\underbrace{\lambda u}_{\in U}) \in \varphi(U).$$

(c) $U \leq W$

$\varphi^{-1}(U)$ Untergruppe von $(V,+)$.

$$\varphi: V \longrightarrow \begin{matrix} W \\ \cup \\ U \end{matrix}$$

z.z: $\varphi^{-1}(U)$ abg. unter skalare Mult,

$\forall x \in \varphi^{-1}(U), \lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda x \in \varphi^{-1}(U)$.

Sei $x \in \varphi^{-1}(U)$.

$\varphi(x) \in U$. UVR von W

$\lambda \varphi(x) \in U$

$\varphi(\lambda x) \in U$

$\Rightarrow \lambda x \in \varphi^{-1}(U)$. $\boxtimes$

$\varphi : V \longrightarrow W$ $\mathbb{R}$-linear

$\ker \varphi$ UVR von V

$\operatorname{Bild} \varphi = \varphi(V)$ UVR von W

Beispiel 4.1.16 $\quad \mathbb{K}$ Körper, $m,n \in \mathbb{N}$

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

$$\Phi_A : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ x & \longmapsto & Ax \end{array} \right) \text{ ist } \mathbb{K}\text{-linear.}$$

$$\Phi_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \Phi_A(x) + \Phi_A(y).$$

$$\Phi_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda A x = \lambda \Phi_A(x).$$

✓

$\ker \Phi_A = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0 \}$ Lösungsmenge des homog. LGS.

$= \ker A$

$\operatorname{Bild} \Phi_A = \{ y \in \mathbb{K}^m \mid (\exists x \in \mathbb{K}^n)\ Ax = y \}$

$= \{ Ax \mid x \in \mathbb{K}^n \}$

$= \operatorname{Bild} A$

Falls $m = n$, dann $\Phi_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ Vektorraumendom.

---

b) $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$.

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}^{n \times p} \longrightarrow \mathbb{K}^{m \times p} \\ X \longmapsto AX \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathbb{K}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{m \times p} \\ X \longmapsto XB \end{pmatrix}$$ sind $\mathbb{K}$-linear.

✓

c)

$\mathrm{Re}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\Longleftarrow$ $\mathbb{R}$-linear

$\mathrm{Im}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\Longleftarrow$ $\mathbb{R}$-linear

$\overline{(\ )}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\Longleftarrow$ $\mathbb{R}$-linear, NICHT $\mathbb{C}$-linear!

$$\boxed{\begin{array}{ll} z \in \mathbb{C} \\ t \in \mathbb{R} & \overline{tz} = t\,\overline{z} \end{array}}$$

$$\overline{t(a+ib)} = \overline{ta + itb} = ta - itb = t(a-ib)$$

$$= t\,\overline{(a+ib)}.$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} z \in \mathbb{C} \\ w \in \mathbb{C} & \overline{wz} = w\,\overline{z} \quad \text{NICHT } \mathbb{C}\text{-linear!} \\ & \underbrace{\overline{i\,1}}_{-i} \neq \underbrace{i\,\overline{1}}_{i} \end{array}}$$

(a)

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times m} \\ A \longmapsto A^T \end{pmatrix}$$ ist ein Vektorraumisom.

$$\mathbb{K}^{m\times n} \cong_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{n\times m}$$

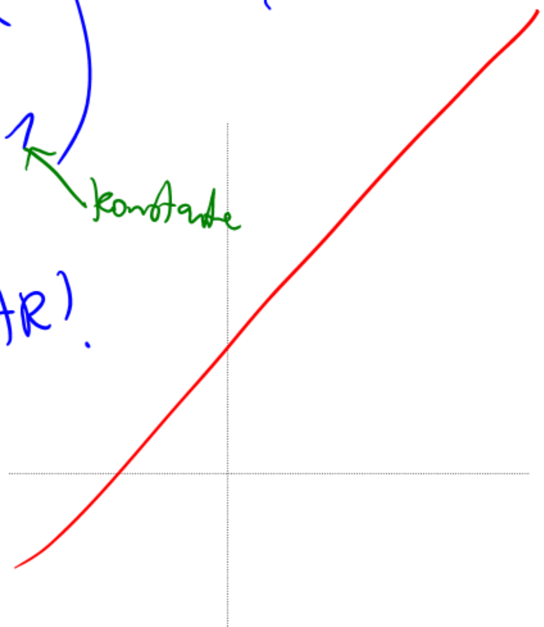
$$\mathbb{K}^{1\times n} \cong_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{n\times 1} = \mathbb{K}^n$$

(e)

$$f: \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+1 \end{pmatrix}$$

linear — konstante

NICHT LINEAR!



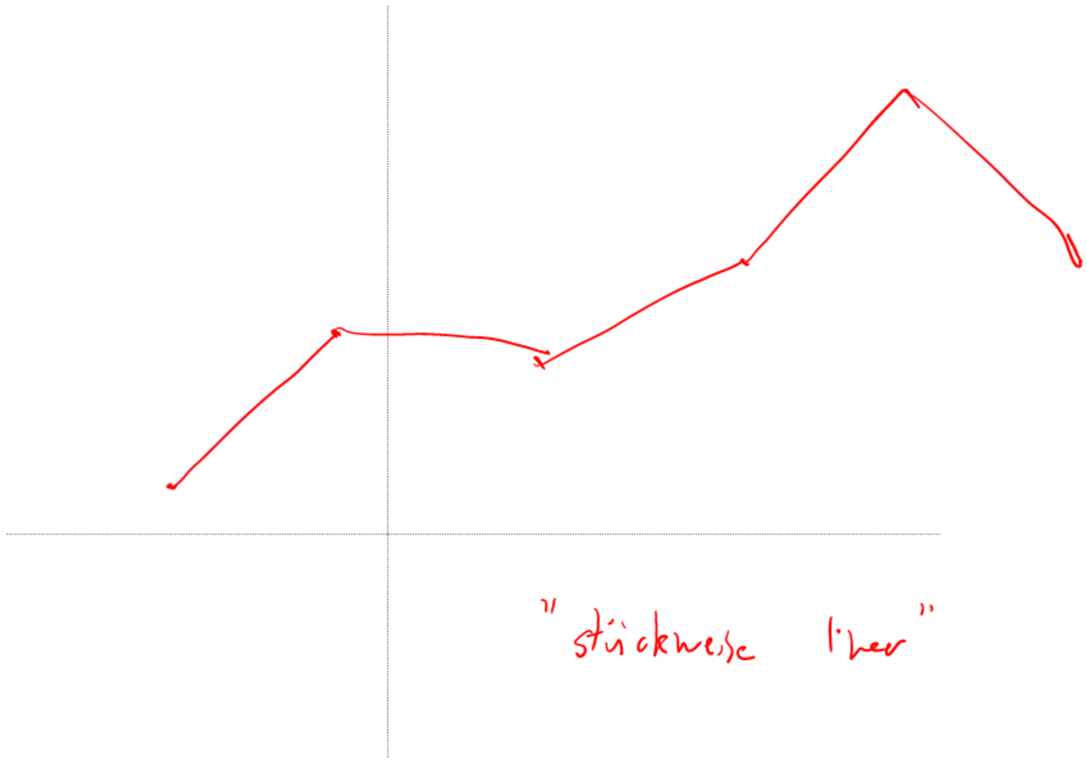
„lineare Funktion"

$$g: \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{pmatrix}$$

$g(0) = 0$

NICHT LINEAR?

$$\cancel{(1+1)^2 = 1^2 + 1^2}$$



"stückweise linear"

(f) $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear.

$a := \varphi(1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = x\, \varphi(1) = x\, a = a\, x$.