

Lineare Algebra I für die Fachrichtung Informatik Wintersemester 2023/24

Erinnerung:

K Körper

V, W K -Vektorräume

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

heißt K -lineare Abbildung

$\Leftrightarrow \varphi$ K -Vektorraum-Homomorphismus

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in V \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\forall x \in V$$

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \cdot \varphi(x)$$

$$\forall \lambda \in K$$

$$\ker \varphi = \{ x \in V \mid \varphi(x) = 0 \} = \varphi^{-1}(\{0\}) \quad \text{UVR von } V$$

$$\text{Bild } \varphi = \varphi(V) = \{ \varphi(x) \mid x \in V \} = \{ y \in W \mid \exists x \in V : \varphi(x) = y \}$$

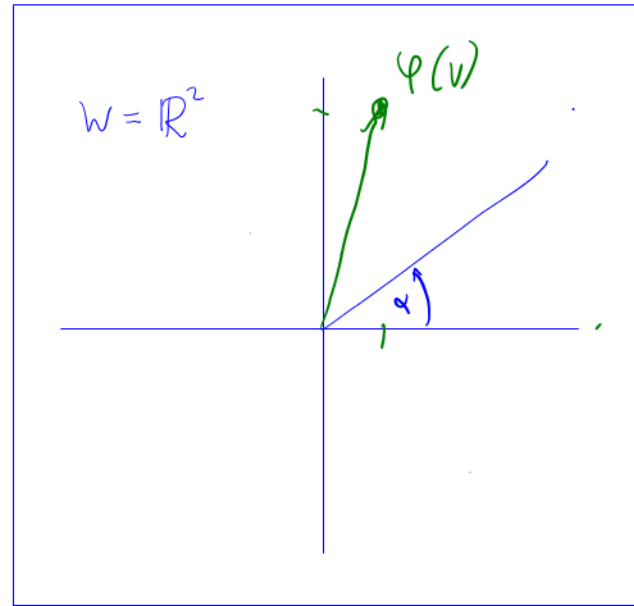
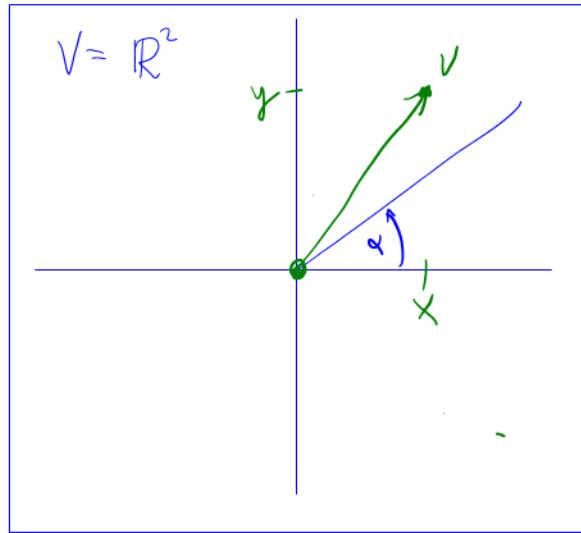
UVR von W

Beispiele für K -lineare Abbildung / Homomorphismen von K -Vektorräumen

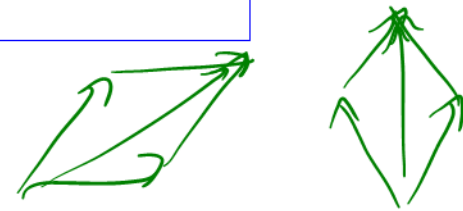
(Fortsetzung vom letzten Mal)

$$K = \mathbb{R}$$

4.1.16 g) $\alpha \in \mathbb{R}$ $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $\varphi = \text{Drehung um Winkel } \alpha \text{ gegen den Uhrzeigersinn}$



$$\begin{aligned} \varphi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot x_1 - \sin(\alpha) \cdot x_2 \\ \sin(\alpha) \cdot x_1 + \cos(\alpha) \cdot x_2 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



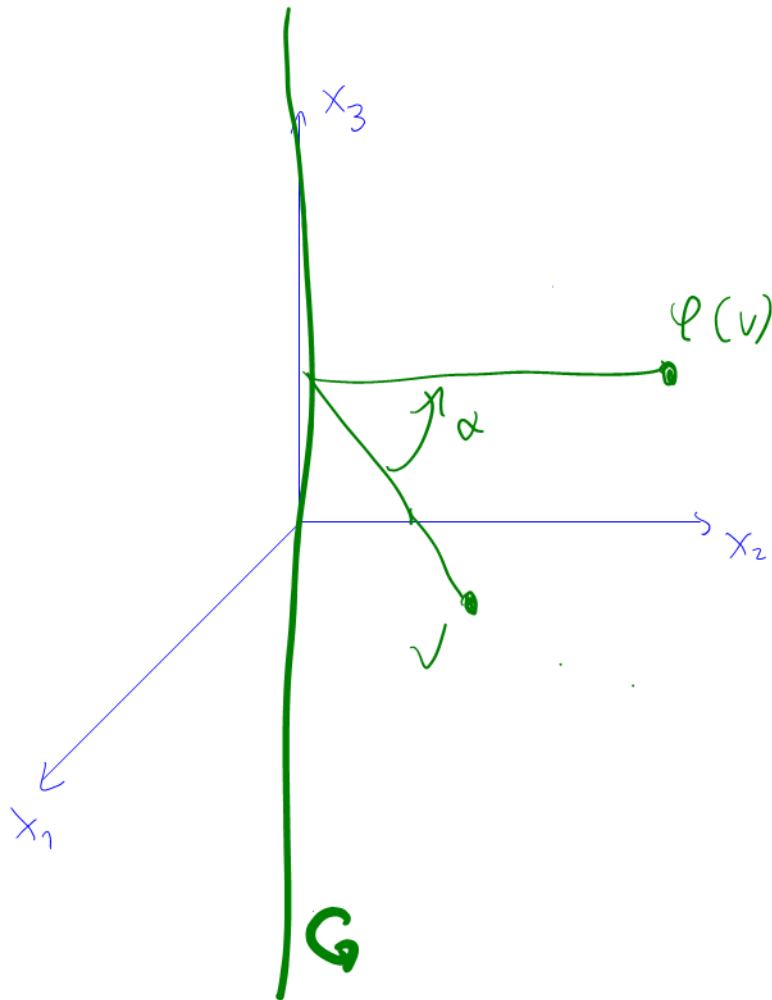
$$\varphi: v \mapsto Av$$

φ $\mathbb{R}$ -Vektorraum-Automorphism von $\mathbb{R}^2$.

4.1.1.6. h

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$



$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

φ = Drehung mit Drehachse G
um den Winkel α

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot x_1 - \sin(\alpha) \cdot x_2 \\ \sin(\alpha) \cdot x_1 + \cos(\alpha) \cdot x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

→ LA2

(i) $\mathbb{C}$ Körpererweiterung von $\mathbb{R}$

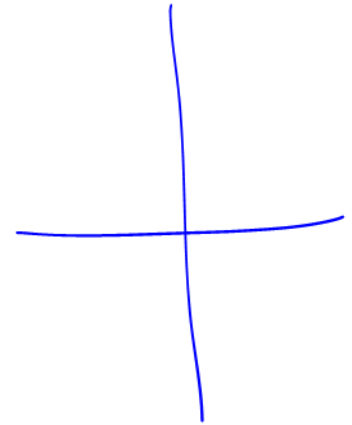
$\leadsto \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \longmapsto & a + ib \end{array} \right)$$

Isomorphismus von $\mathbb{R}$ -VR.



$\mathbb{F}_4$ Körpererweiterung von $\mathbb{F}_2$

$\leadsto \mathbb{F}_4$ ist $\mathbb{F}_2$ -VR.

$$+: \mathbb{F}_4 \times \mathbb{F}_4 \rightarrow \mathbb{F}_4$$

$$\cdot: \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_4 \rightarrow \mathbb{F}_4$$

+	0	1	A	B
0	0	1	A	B
1	1	0	B	A
A	A	B	0	1
B	B	A	1	0

·	0	1	A	B
0	0	0	0	0
1	0	1	A	B

$\varphi:$

$$\left(\begin{array}{c} (\mathbb{F}_2)^2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto 1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto A \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto B \end{array} \right) \longrightarrow \mathbb{F}_4$$

Isomorphismus
von $\mathbb{F}_2$ -Vektorräumen

$\mathbb{F}_4$

+	0	1	A	B
0	0	1	A	B
1	1	0	B	A
A	A	B	0	1
B	B	A	1	0

·	0	1	A	B
0	0	0	0	0
1	0	1	A	B
A	0	A	B	1
B	0	B	1	A

(j) $c(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \text{Vektorraum der konvergenten Folgen} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

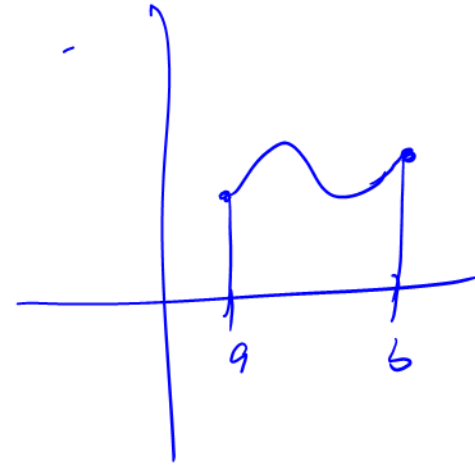
$$\text{Lim} : \begin{pmatrix} c(\mathbb{N}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ (x_n)_n & \xrightarrow{\quad} & \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}\text{-lineare Abb.}$$

$\text{Ker}(\text{Lim}) = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \text{Menge aller Folgen mit Grenzwert } 0 \neq \{0\}$
 Lim ist nicht injektiv.

$\text{Bild}(\text{Lim}) = \mathbb{R}.$

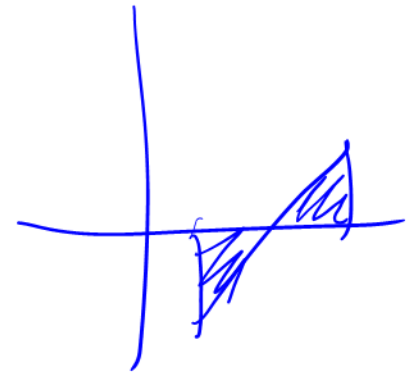
$$(k) \quad C([a, b], \mathbb{R}) = \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \} \subseteq \mathbb{R}^{[a, b]}$$

$$\int : \left(\begin{array}{ccc} C([a, b], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f(t) dt \end{array} \right) \quad \mathbb{R}\text{-lineare Abb.}$$



$$\text{Bild}(\int) = \mathbb{R}$$

$$\text{Ker}(\int) = \left\{ f \mid \int_a^b f(t) dt = 0 \right\}$$



$$(l) \quad C^1([a, b], \mathbb{R}) = \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ diffbar; } f' \text{ stetig} \}$$

$$\frac{d}{dt}: \left(\begin{array}{ccc} C^1([a, b], \mathbb{R}) & \longrightarrow & C([a, b], \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right) \quad \mathbb{R}\text{-linear.}$$

$\ker\left(\frac{d}{dt}\right) =$ Menge aller konstanten Funktionen

$\text{Bild}\left(\frac{d}{dt}\right) = C([a, b], \mathbb{R})$ „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“

Weitere Beispiele:

K Körper

- V K -Vektorraum

$$\text{id}_V: \begin{pmatrix} V \longrightarrow V \\ x \longmapsto x \end{pmatrix} \quad K\text{-Vektorraum-Homom.}$$

- V, W K -Vektorräume

$$0: \begin{pmatrix} V \longrightarrow W \\ x \longmapsto 0 \end{pmatrix} \quad K\text{-lineare Abb.}$$

- $] \text{ Menge, } a \in]$

$$\text{ev}_a: \begin{pmatrix} K^J \longrightarrow K \\ f \longmapsto f(a) \end{pmatrix} \quad K\text{-lineare Abb.}$$

$V \subseteq K^J$
Untervektorraum

$$\text{ev}_a: \begin{pmatrix} V \longrightarrow K \\ f \longmapsto f(a) \end{pmatrix} \quad K\text{-lineare Abb.}$$

Prop 4.1.17

V, W Vektorräume über K

K Körper

$$\text{Hom}_K(V, W) := \{ \varphi: V \rightarrow W \mid \varphi \text{ } K\text{-linear} \} \subseteq W^V$$

$\Rightarrow \text{Hom}_K(V, W)$ ist K -Untervektorraum von W^V

$$0: V \rightarrow W: x \mapsto 0 \Rightarrow 0 \text{ } K\text{-linear}$$

$$\varphi, \psi: V \rightarrow W \text{ } K\text{-linear} \Rightarrow \varphi + \psi \text{ } K\text{-linear}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi: V \rightarrow W \text{ } K\text{-linear} \\ \lambda \in K \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \varphi \text{ } K\text{-linear}$$

Bw: 0 linear ✓

$$\varphi, \psi \Rightarrow \varphi + \psi \text{ linear}$$

Sei $x, y \in V$.

$$\left(\text{z.z: } (\varphi + \psi)(x + y) = (\varphi + \psi)(x) + (\varphi + \psi)(y) \right)$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi + \psi)(x+y) &= \varphi(x+y) + \psi(x+y) \\
 &= \varphi(x) + \varphi(y) + \psi(x) + \psi(y) \\
 &= \varphi(x) + \psi(x) + \varphi(y) + \psi(y) \\
 &= (\varphi + \psi)(x) + (\varphi + \psi)(y).
 \end{aligned}$$

Sei $x \in V$
 $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\left(\text{z.z.} \therefore (\varphi + \psi)(\lambda x) = \lambda (\varphi + \psi)(x) \right)$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi + \psi)(\lambda x) &= \varphi(\lambda x) + \psi(\lambda x) \\
 &= \lambda \varphi(x) + \lambda \psi(x) \\
 &= \lambda (\varphi(x) + \psi(x)) = \lambda (\varphi + \psi)(x).
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi + \psi$ linear.

φ linear
 $\lambda \in K$

$$\left(\begin{aligned} (\lambda \varphi)(x+y) &= (\lambda \varphi)(x) + (\lambda \varphi)(y) \\ (\lambda \varphi)(\mu x) &= \mu (\lambda \varphi)(x) \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} (\lambda \varphi)(x+y) &= \lambda \cdot \varphi(x+y) = \lambda \cdot (\varphi(x) + \varphi(y)) \\ &= \lambda \varphi(x) + \lambda \varphi(y) \\ &= (\lambda \varphi)(x) + (\lambda \varphi)(y) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$(\lambda \varphi)(\mu x) = \lambda (\varphi(\mu x)) = \lambda (\mu \varphi(x))$$

$$= (\lambda \mu) \varphi(x) = (\mu \lambda) \varphi(x) = \mu (\lambda \varphi(x))$$

K
Körper

$$= \mu (\lambda \varphi)(x)$$

Def 4.2.1 Lineare Hülle

K Körper

(a) V K -Vektorraum $r \in \mathbb{N}_0$

$$v_1, v_2, \dots, v_r \in V$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K,$$

$\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j$ heißt Linearkombination von $v_1, \dots, v_r$

$\sum_{j=1}^0 := 0$ „leere Summe ist 0“

(b)

K Körper

V K -Vektorraum

$$M \subseteq V$$

$LH_K(M) = LH(M) =$ Menge aller endlichen Linearkombinationen
von Elementen aus M

Lineare Hülle von M

$$LH(\emptyset) = \{0\}$$

Wie in
Lemma 2.3.4 sieht man $LH(M)$ ist ein UVR von V .

Mehr noch: $LH(M)$ ist der kleinste UVR von V , der M enthält, d.h.

- $M \subseteq LH(M)$
- $\forall U$ UVR von V , $M \subseteq U$, $LH(M) \subseteq U$.

$LH(M)$ ist der von M erzeugte UVR.

(c)

K Körper

V K -Vektorraum

$M \subseteq V$ heiße **Erzeugendensystem** von V ,

falls $LH_K(M) = V$

Bemerkung: • V ist ein Erzeugendensystem von V .

• $LH(\emptyset) = V \iff V \cong K^0 = \{0\}$.

Def 4.2.3

$\mathbb{K}$ Körper

V $\mathbb{K}$ -Vektorraum

(a) $L = \{v_1, \dots, v_r\}$ endliche Menge von r Vektoren, $r \in \mathbb{N}_0$.

L linear unabh.

$$\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K} \quad \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j = 0 \Rightarrow \forall j \quad \lambda_j = 0.$$

(b) Allgemein: L heißt linear unabh.

$\Leftrightarrow$ Jede endlich Teilmenge ist lin. unabh.

Def. 4.2.4

K Körper

V K -Vektorraum

$B \subseteq V$ heißt Basis von V

$:\Leftrightarrow$

B ist Erzeugendensystem von V

UND

B ist lin. unabhängig.

Bsp 4.2.5

(a) K Körper, $n \in \mathbb{N}$

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ist eine Basis von K^n ,
genannt Standardbasis

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \text{ Standardbasisvektor}$$

(b) K Körper

$K^{2 \times 2}$

K -Vektorraum.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis für

K -VR

$K^{2 \times 2}$.

(c) K Körper, $m, n \in \mathbb{N}$

$$\left\{ E_{k,l} : \begin{array}{l} 1 \leq k \leq m, \\ 1 \leq l \leq n \end{array} \right\}$$

$$E_{k,l} = \begin{pmatrix} & & & & l \\ & & & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Standard

matrizen.

ist eine Basis für den K -Vektorraum

$K^{m \times n}$

$$E_{k,l} = \begin{pmatrix} 1 & \text{falls } i=k \\ & \text{und } j=l \\ 0 & \text{sonst} \end{pmatrix}_{i,j}$$

$$= \left(\delta_{i,k} \cdot \delta_{j,l} \right)_{i,j}$$

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A \in K^{m \times n}$$

$$A = (a_{ij})_{i,j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$$

(d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$f_\alpha: (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$$

$$t \mapsto e^{\alpha t}$$

$$f_0 = 1$$

$$f_1 = \exp$$



$$f_2$$

$$f_{-1}$$



$$f_\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Beh: $\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ist linear unabh.

Bw: Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. (z.z.: $\{f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n}\}$ linear unabh.)
 paarw. verschieden.

OBdA: $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j f_{\alpha_j} = 0$$

z.z: $\forall j \quad \lambda_j = 0.$

$\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j f_{\alpha_j}(t) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j e^{\alpha_j t} = 0$$

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t} + \dots + \lambda_n e^{\alpha_n t} = 0 \quad | \cdot e^{-\alpha_1 t}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} + \dots + \lambda_n e^{(\alpha_n - \alpha_1)t} = 0$$

$\rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0.$$