

Lineare Algebra I für die Fachrichtung Informatik Wintersemester 2023/24

Beispiele: 4.2.5 d)

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}: f_\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}; f_\alpha(t) = e^{\alpha t}.$$

$$\{e^{\alpha t} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ lin. unabh. in } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$\{e^{\alpha t} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ ist } \underline{\text{kein}} \text{ Erzeugendensystem von } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

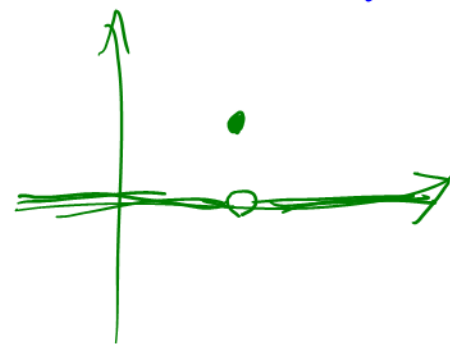
4.2.5.e)

$$V = \mathbb{K}^J$$

$\mathbb{K}$ Körper
 J Menge

$$\forall j \in J \quad e_j: J \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x \longmapsto \delta_{xj} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Beh: $\{e_j \mid j \in J\}$ ist linear unabh. in $\mathbb{K}^J$

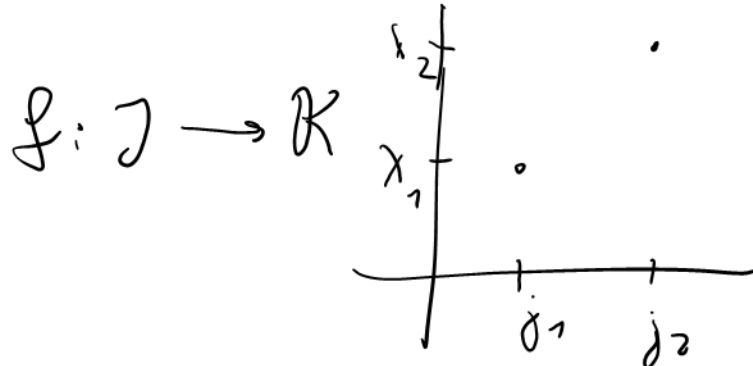
Bw:

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k e_{j_k} = \underset{\uparrow}{0}$$

$j_1, j_2, \dots, j_r$ sind paarw. verschieden.

$$f(j_k) = \lambda_k = 0.$$

$$\text{z.z. } \lambda_k = 0.$$



$$\text{LH} \left(\{e_j \mid j \in J\} \right) = \{ f: J \rightarrow K \mid f \text{ nur an endlich vielen Stellen } \neq 0 \}$$

$$= K^{(J)}$$

Für J endlich ist $K^{(J)} = K^J$ und $\{e_j \mid j \in J\}$ Basis von K^J .

Für J unendlich ist $K^{(J)} \neq K^J$. $\{e_j \mid j \in J\}$ keine Basis von K^J .

Allgemein gilt: $K^{(J)}$ hat eine Basis: $\{e_j \mid j \in J\}$.

(f) $\mathbb{C}$ ist Körpererweiterung von $\mathbb{R}$
Also $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Beh: $\{1, i\}$ ist linear unabh. in $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Bw: $\alpha 1 + \beta i = 0 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0. \quad \checkmark$

$\{1, i\}$ ist Erzeugendensystem von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Sei $z \in \mathbb{C}.$

$\Rightarrow \underline{\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}} : z = \alpha + i\beta = \alpha \cdot 1 + \beta i. \quad \checkmark$

$\{1, i\}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ -VR.

(g) $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

$\{1, i\}$ ist NIHT linear unabh. für $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

$$i \cdot 1 + (-1) \cdot i = 0$$

$\{1, i\}$ ist Erzeugnis für $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$ -VR.

$$(z \in \mathbb{C} : z = a + ib = a \cdot 1 + b \cdot i \quad (a, b \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}))$$

$$(z \in \mathbb{C} : z = z \cdot 1 + 0i)$$

(h) $\mathbb{R}$ ist Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$

Also $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.

Beh: $\{1, \sqrt{2}\}$ ist linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Bw: $\alpha \cdot 1 + \beta \sqrt{2} = 0 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}. \quad (\text{z.z.: } \alpha = \beta = 0)$

$$\beta \sqrt{2} = -\alpha$$

1. Fall: $\beta \neq 0$

$$\sqrt{2} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$\uparrow \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\in \mathbb{Q}}$
 $\notin \mathbb{Q} \quad \in \mathbb{Q}$



2. Fall: $\beta = 0$

$$0 \cdot \sqrt{2} = -\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Basen

4.2.6 Lemma:

K Körper

V, W Vektorräume über K

$\varphi: V \longrightarrow W$ K -linear

(a) $\left(\begin{array}{l} M \subseteq V \\ \text{Erzeugendensystem von } V \end{array} \right) \text{ UND } \left(\begin{array}{l} \varphi \\ \text{surjektiv} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \varphi(M) \\ \text{Erzeugendensystem von } W \end{array} \right)$

(b) $\left(\begin{array}{l} L \subseteq V \\ \text{linear unabhängig} \end{array} \right) \text{ UND } \left(\begin{array}{l} \varphi \\ \text{injektiv} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \varphi(L) \\ \text{linear unabhängig} \end{array} \right)$

(c) $\left(\begin{array}{l} B \subseteq V \\ \text{Basis von } V \end{array} \right) \text{ UND } \left(\begin{array}{l} \varphi \\ \text{bijektiv} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \varphi(B) \\ \text{Basis von } W \end{array} \right)$

Bw: (a) (z.z. $\text{LH}(\varphi(M)) = W$.)

Sei $w \in W$.

z.z.: $v \in \text{LH}(\varphi(M))$

φ surj $\Rightarrow \exists v \in V: \varphi(v) = w$.

$\text{LH}(M) = V \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_r \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K: v = \sum_{j=1}^r \lambda_j a_j$

$$w = \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j a_j\right) = \sum_{j=1}^r \varphi(\lambda_j a_j) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \underbrace{\varphi(a_j)}_{\in \varphi(M)} \in \text{LH}(\varphi(M)).$$

(b)

$$L \subseteq V$$

lin. unabh. in V $\varphi: V \rightarrow W$ inj. linear.

(z.z.: $\varphi(L)$ lin. unabh. in W)

$w_1, \dots, w_r \in \varphi(L)$ paarw. verschieden

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j w_j = 0$$

$$(z.z.: \forall_j \lambda_j = 0)$$

$w_j \in \varphi(L) \Rightarrow \exists v_j \in L: w_j = \varphi(v_j)$. Weil (w_j) paarw. verschieden sind, sind auch (v_j) paarw. verschieden.

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \varphi(v_j) = 0$$

$$\xRightarrow{\varphi \text{ linear}} \varphi\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \in \ker \varphi = \{0\}, \text{ weil } \varphi \text{ injektiv.}$$

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j = 0 \xRightarrow{L \text{ lin. unabh.}} \forall_j \lambda_j = 0.$$

(c) folgt direkt aus (a) und (b).

Frage: Hat jeder Vektorraum eine Basis?

Antwort: Ja?

Erinnerung:

Satz 2.3.18 (Basisauswahl- und ergänzungssatz). Gegeben seien

- ein Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
- ein Erzeugendensystem M von U ,
- eine linear unabhängige Teilmenge $L \subseteq M$.

Dann gibt es eine Basis B von U mit

$$L \subseteq B \subseteq M.$$



4.2.7 Basisauswahl und -ergänzungssatz für endlich-erzeugte Vektorräume

Es sei K ein Körper,

V ein K -Vektorraum und

- $M \subseteq V$ ein Erzeugendensystem von V
- $L \subseteq M$ eine linear unabh. Teilmenge

Wir nehmen zusätzlich an:

Jede linear abhängige Teilmenge von M ist endlich.

DANN $\Rightarrow$ Es existiert eine endliche
Basis B von V mit
 $L \subseteq B \subseteq M$.

Bw: $L_0 := L$.

Wenn $M \subseteq L_H(L_0)$, dann $V = L_H(M) = L_H(L_0)$.

$\Rightarrow L_0$ Basis ✓

Wenn $M \not\subseteq L_H(L_0)$, dann $\exists a_0 \in M, a_0 \notin L_H(L_0)$.

$L_1 = L_0 \cup \{a_0\}$ lin. unabh. $\subseteq M$.

Wenn $M \subseteq L_H(L_1)$, dann $V = L_H(M) = L_H(L_1)$.

$\Rightarrow L_1$ Basis ✓

Wenn $M \not\subseteq L_H(L_1)$, dann $\exists a_1 \in M, a_1 \notin L_H(L_1)$.

$L_2 = L_1 \cup \{a_1\}$ lin. unabh. $\subseteq M$.

Rekursiv ...

Wenn $M \not\subseteq L_H(L_k)$, dann $\exists a_k \in M, a_k \notin L_H(L_k)$,

$L_{k+1} = L_k \cup \{a_k\}$.

Frage: Terminiert dieses Vorgehen irgendwann?

Fall, Nein: $L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq L_3 \subsetneq \dots$

$$L_\omega := \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k \quad \text{linear unabh.} \subseteq M$$

Aber L_ω ist unendlich. Widerspruch zur
zusätzlichen Annahme im Satz.



}

Satz 4.2.8

K Körper

V Vektorraum über K , $n \in \mathbb{N}_0$

$v_1, \dots, v_n \in V$ paarw. verschiedene Vektoren.

$$\psi: K^n \rightarrow V$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^n x_j v_j$$

(a) ψ ist K -linear

(b) ψ ist injektiv $\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig

(c) ψ ist surjektiv $\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ Erzeugendensystem von V

(d) ψ ist bijektiv $\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V

Bw: (a) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{z.z.: } \psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$
 $\psi(\lambda x) = \lambda \psi(x).$

$$\psi(x+y) = \psi\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n (x_j + y_j) v_j = \sum_{j=1}^n (x_j v_j + y_j v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^n x_j v_j + \sum_{j=1}^n y_j v_j = \psi(x) + \psi(y).$$

$$\psi(\lambda x) = \psi\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \psi\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n (\lambda x_j) v_j = \lambda \sum_{j=1}^n x_j v_j = \lambda \psi(x).$$

b) ψ ist injektiv

z.B.: $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. unabh.

$$\Leftrightarrow \ker \psi = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in K^n \right) \psi(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i \ x_i = 0. \right)$$

$$\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\} \text{ lin. unabh.}$$

c) ψ ist surjektiv

$$\Leftrightarrow \psi(K^n) = V$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in V \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \quad v = \psi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

$$\Leftrightarrow \text{LH}(\{v_1, \dots, v_n\}) = V \Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\} \text{ Erzeugendensystem von } V$$

Satz 4.2.9

K Körper

V K -Vektorraum.

- (a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
- (i) Es gibt eine endliche Menge M mit $\text{LH}(M) = V$
 - (ii) $\exists n \in \mathbb{N}_0 : \forall M \subseteq V : |M| > n \Rightarrow M$ linear abhängig
 - (iii) V hat eine endliche Basis
 - (iv) $\exists n \in \mathbb{N}_0 : V \cong_K K^n$

Ein Vektorraum mit diesen Eigenschaften heißt endlich-dimensional.

Andernfalls heißt es unendlich-dimensional.

Bw (a):

(i)

Es gibt eine endliche Menge
 M mit $\text{LH}(M) = V$

(ii)

$\exists n \in \mathbb{N}_0 : \forall M \subseteq V :$
 $|M| > n \Rightarrow M$ linear abhängig

(iii)

V hat eine endliche Basis

(iv)

$\exists n \in \mathbb{N}_0 : V \cong_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n$

(i) $\Rightarrow$ (iii): 4.2.7 angewandt auf endliches Erzeugnis M und $L = \emptyset$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 4.2.7 angewandt auf $M = V$ und $L = \emptyset$. ✓

(iii) $\Rightarrow$ (iv): 4.2.9

(iv) $\Rightarrow$ (i): $\mathbb{K}^n$ hat eine endliche Basis, $\mathbb{K}^n \cong V \Rightarrow V$ hat endliche Basis
 $\Rightarrow V$ hat endliches Erzeugnis.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): $\forall M \subseteq \mathbb{K}^n, |M| > n \Rightarrow M$ lin. abh. (2.3.13)

Lemma 4.2.6 erlaubt uns, dies auf V zu übertragen.

4.2.9 b)

$\mathbb{K}$ Körper

V endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$

Jede Basis von V hat gleich viele Elemente.

Die Anzahl der Elemente in einer Basis

heißt **Dimension** von V

und wird mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim(V) \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet.

Wenn V unendlich-dimensional ist, dann schreiben wir

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim(V) = \infty.$$

(b) V endlich dim. Nach (a) ist $V \cong \mathbb{R}^n$.

$\exists \varphi: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Isomorphismus.

$B, C \subseteq V$ Basen.

$\varphi(B), \varphi(C)$ Basen in $\mathbb{R}^n$

$$2.3.23 \Rightarrow |\varphi(B)| = |\varphi(C)|$$

$$\Rightarrow |B| = |C|.$$

4.2.9c)

K Körper

V endlichdimensionaler K -Vektorraum.

$$\Rightarrow \dim(V) = \min \left\{ |M| \mid M \text{ Erzeugendensystem von } V \right\}$$

$$\dim(V) = \max \left\{ |M| \mid M \subseteq V \text{ linear unabh.} \right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \dim(V) = n \iff V \cong K^n$$

Bw: $M \subseteq V$ Erzeugendensystem.

$$\Rightarrow \exists B \subseteq V \text{ Basis, } B \subseteq M. \quad |B| \leq |M|$$

$\nearrow$
 $\dim V$

$L \subseteq V$ lin. unabh.

$$\Rightarrow \exists B \subseteq V, L \subseteq B \quad |L| \leq |B| = \dim V.$$

$$V \cong K^n \Rightarrow \dim V = \dim K^n = n.$$



Lemma 4.2.10 (Monotonie der Dimension)

K Körper

V Vektorraum über K

$W \subseteq V$ Untervektorraum

(a)

V endlichdimensional

$\Rightarrow$

W endlichdimensional

und

$$\dim_K W \leq \dim_K V$$

(b)

V endlichdimensional

und

$$W \subsetneq V$$

$\Rightarrow$

$$\dim_K W < \dim_K V$$

(c)

W unendlichdimensional

$\Rightarrow$

V unendlichdimensional

Def 4.2.12 (Dimension eines affinen Unterraums)

V Vektorraum über K .

K Körper

$R = p + U$ sei ein affiner Unterraum von V
($p \in V$, U UVR von V)

$$\dim(R) := \dim(U) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

Def 4.2.13 (Rang einer linearen Abbildung)

K Körper

V, W K -Vektorräume, $\varphi: V \rightarrow W$ linear

$$\text{Rang}(\varphi) = \text{rg}(\varphi) := \dim(\text{Bild } \varphi) = \dim(\varphi(V)) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

Beispiele:

- $n \in \mathbb{N}_0, \mathbb{K} \text{ Körper}$

$$\dim_{\mathbb{K}} (\mathbb{K}^n) = n$$

$$m, n \in \mathbb{N}_0, \mathbb{K} \text{ Körper}$$

$$\dim_{\mathbb{K}} (\mathbb{K}^{m \times n}) = mn$$

- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$$

- $\mathcal{I}$ unendliche Menge, $\mathbb{K}$ Körper $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{(\mathcal{I})} = \infty$

- $\mathbb{K}^{(\mathcal{I})} \subseteq \mathbb{K}^{\mathcal{I}} \Rightarrow \dim \mathbb{K}^{\mathcal{I}} = \infty$

- $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subseteq \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \subseteq c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \subseteq c(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Alle diese Räume sind
unendlich dimensional.

FROHE
FEIERTAGE

UND
EINEN
GUTEN
RÜTSCH
NACH

