Karlsruher Institut für Technologie

# Lineare Algebra I
# für die Fachrichtung Informatik
## Wintersemester 2023/24

Ein Frohes Neues Jahr

$2^3 \cdot 11 \cdot 23.$

$\mathbb{K}$ Körper (z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $p$ Primzahl)

$V, W$ $\mathbb{K}$-Vektorräume

$\varphi : V \longrightarrow W$ $\mathbb{K}$-Vektorraumhomomorphismus

$\mathbb{K}$-linear

$\mathbb{K}$ Körper (z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $p$ Primzahl)

$V, W$ $\mathbb{K}$-Vektorräume

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) = \{ \varphi : V \longrightarrow W \mid \varphi \text{ ist } \mathbb{K}\text{-linear} \}$$

$\mathbb{K}$-Vektorraum

# Fortsetzungssatz 4.2.14

$\mathbb{K}$ Körper

$V, W$ $\mathbb{K}$-Vektorräume

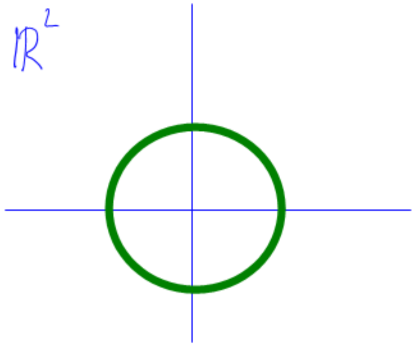
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) = \{ \varphi : V \longrightarrow W \mid \varphi \text{ ist } \mathbb{K}\text{-linear} \}$$

(a) $M \subseteq V$ mit $LH(M) = V$

$\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ mit $\varphi|_M = \psi|_M$

Dann gilt: $\varphi = \psi$. , d.h.

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow W^M \\ \varphi \longmapsto \varphi|_M \end{pmatrix} \text{ ist injektiv.}$$



Bw: Let $v \in V$. $\quad$ (zz: $\varphi(v) = \psi(v)$.)

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$$

$\lambda_j \in \mathbb{K}$, $v_j \in M$.

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \psi(v_j)$$

$$= \psi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \psi(v)$$

$\blacksquare$

# Fortsetzungssatz 4.2.14

$K$ Körper

$V, W$ $K$-Vektorräume

$\mathrm{Hom}_K(V,W) = \{ \varphi : V \to W \mid \varphi \text{ ist } K\text{-linear} \}$

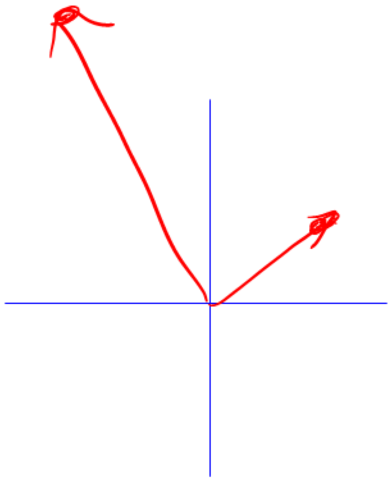
(b) $B \subseteq V$ sei eine Basis von $V$

$f : B \to W$ sei eine Abbildung.

Dann gibt es eine eindeutige $K$-lineare Abbildung

$\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ mit $\varphi|_B = f.$, d.h.

$\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow W^B \\ \varphi \longmapsto \varphi|_B \end{pmatrix}$ ist bijektiv, d.h. $\mathrm{Hom}(V,W) \cong W^B$



Bw: siehe Skript.

$$\left( \varphi\left( \sum \lambda_j v_j \right) := \sum \lambda_j f(v_j) \right),$$

Erinnerung: $B \subseteq V$ $|B| = n < \infty$.

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$$\varphi : \left( \begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & V \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & x_1 b_1 + \dots + x_n b_n \end{array} \right)$$

$B$ Basis $\Rightarrow$ $\varphi$ ISOMORPHISMUS

$$\Longrightarrow \quad V \cong K^n$$

**Idee:** Untersuche lin. Abbildungen

von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$.

---

**z.B.:** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\varphi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = 2\updownarrow \underset{\overset{\longleftrightarrow}{4}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}} x$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

IN DEN SPALTEN DER MATRIX STEHEN DIE BILDER DER BASISVEKTOREN!

## Satz 4.3.1 (Darstellungsmatrizen einer Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ bzgl. der Standardbasis)

$m, n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $\mathbb{K}$ Körper

(a) $\boxed{A \in \mathbb{K}^{m \times n} \Longrightarrow \left(\varphi_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m : x \longmapsto Ax\right) \text{ ist } \mathbb{K}\text{-linear.}}$

$$A = \left( \left| \varphi_A(e_1) \right| \varphi_A(e_2) \left| \; \ldots \; \right| \varphi_A(e_n) \right)$$

In den Spalten der Matrix $A$ stehen die Bilder der Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_n$.

$\boxtimes$

(b) $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$
$\exists A \in \mathbb{K}^{m \times n} : \varphi = \varphi_A .$

Diese Matrix ist eindeutig
(und heißt Darstellungsmatrix von $\varphi$ (bzgl. Standardbasis)

$$A = M_{EE}(\varphi)$$

Bw (b):

$$A = \left( \varphi(e_1) \middle| \varphi(e_2) \middle| \dots \middle| \varphi(e_n) \right) \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

$(\text{z.z.: } \varphi = \varphi_A)$

$$\varphi(e_j) = \varphi_A(e_j) \Longrightarrow \varphi = \varphi_A .$$

Anm: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

c) $A \in K^{m\times n}$ $\quad B \in K^{n\times p}$

$$\begin{tikzcd}
K^p \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_A \circ \varphi_B"'] & K^n \arrow[r, "\varphi_A"] & K^m
\end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$$

$$\begin{tikzcd}
K^p \arrow[r, "\psi"] & K^n \arrow[r, "\varphi"] & K^m
\end{tikzcd}$$

$$\underbrace{M_{EE}(\varphi\circ\psi)}_{m\times p} = \underbrace{\underbrace{M_{EE}(\varphi)}_{(m\times n)}\ \underbrace{M_{EE}(\psi)}_{(n\times p)}}_{m\times p}$$

Bw: $$(\varphi_A \circ \varphi_B)(x) = \varphi_A\big(\varphi_B(x)\big)$$

$$= \varphi_A(Bx) = A(Bx) = (AB)x = \varphi_{AB}(x).$$

(d)

$$\varphi_{\mathbb{1}_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$$

$$M_{EE}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = \mathbb{1}_n.$$

Bw: $\varphi_{\mathbb{1}_n}(x) = \mathbb{1}_n x = x = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}(x)$

$$\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$$

$$\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}(x) = x$$

$$\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) $m, n \in \mathbb{N}$

$$\left( \begin{aligned} \mathbb{K}^{m \times n} &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \\ A &\longmapsto \varphi_A \end{aligned} \right)$$

ist ein Vektorraumisomorphismus

mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) &\longrightarrow \mathbb{K}^{m \times n} \\ \varphi &\longmapsto M_{EE}(\varphi) . \end{aligned}$$

Bw: $\varphi_{A+B} = \varphi_A + \varphi_B \qquad \varphi_{\lambda A} = \lambda \varphi_A$

$$\varphi_{A+B}(x) = (A+B)x = Ax + Bx$$
$$= \varphi_A(x) + \varphi_B(x)$$

$$\varphi_{\lambda A}(x) = (\lambda A)x$$
$$= \lambda(Ax) = \lambda\varphi_A(x).$$

---

(f) $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ ist genau dann bijektiv, wenn
(d.h. $\varphi$ Vektorisomorphismus)

$m = n$

und

$A = M_{EE}(\varphi) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar ist im Ring $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \cdot)$
$(\exists B \in \mathbb{K}^{n\times n} : AB = \mathbb{1} = BA)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{K}^n \arrow[l, bend left, "\varphi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$M_{EE}(\varphi^{-1}) = \left(M_{EE}(\varphi)\right)^{-1}$$

Bw: $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ Vektorraum-Iso.

$\Longrightarrow n = \dim \mathbb{K}^n = \dim \mathbb{K}^m = m$. (4.2.9 c).

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

$\varphi^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad B = M_{EE}(\varphi^{-1})$.

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = id = \varphi^{-1} \circ \varphi$$

$$M_{EE}(\varphi)\, M_{EE}(\varphi^{-1}) = \mathbb{1}_n = M_{EE}(\varphi^{-1})\, M_{EE}(\varphi)$$

$$AB = \mathbb{1}_n = B\,A.$$

$\Longrightarrow A$ invertierbar.

Umgekehrt: $\overset{m=n}{A}$ $\overset{\text{und}}{\text{invertierbar}}$. $A^{-1} \in K^{n \times n}$.

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_{\mathbb{1}} = id = \varphi_{\mathbb{1}} = \varphi_{A^{-1}A} = \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A$$

## Def. 4.3.2

$n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $\mathbb{K}$ Körper

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt invertierbar, wenn

$\exists B \in \mathbb{K}^{n \times n}: \quad AB = 1_n = BA$ .

$B =$ Inverses von $A$ $= A^{-1}$.

---

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{ A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid A \text{ invertierbar} \}$$

$$= \left( \mathbb{K}^{n \times n} \right)^{\times}$$

Allgemeine Lineare Gruppe

Z.B.: (a) $\mathbb{1}_n \in GL(n, \mathbb{K})$

$\mathbb{1}_n^{-1} = \mathbb{1}_n$.

(b) Wenn $A$ eine Nullzeile hat, dann ist $A$ NICHT ivertierbar, weil

$$\mathbb{1}_n = AB = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & \end{pmatrix} \quad ↯.$$

Analog: Wenn $A$ eine Nullspalte hat, ist $A$ NICHT invertierbar.

(c) Lemma 2.5.4: $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \mu & & 1 \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit Inverse $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ -\mu & & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&&& \\ &&& 1 &&&&&&&& \\ &&&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&&& 1 &&&&&& \\ &&&&&& 1 &&&&& \\ &&&&&&& 1 &&&& \\ &&&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar

und selbst invers.

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& \lambda &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar

mit Inverse

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& \frac{1}{\lambda} &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&&&& 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda \neq 0.$

## Satz 4.3.4

$\mathbb{K}$ Körper

$n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{A \in \mathbb{K}^{n \times n}}$$

Dann sind äquivalent:

(i) $A$ invbar

(ii) $A^T$ invbar

(iii) $\exists B \in \mathbb{K}^{n \times n} : BA = \mathbb{1}$

(iv) $\exists B \in \mathbb{K}^{n \times n} : AB = \mathbb{1}$

(v) $\ker A = \{0\}$

(vi) $\operatorname{rg} A = n$

(vii) $\varphi_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ist injektiv

(viii) $\varphi_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ist surjektiv

(ix) $\varphi_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ist bijektiv