

Lineare Algebra I

für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2023/24

$$A \in K^{n \times n} \text{ invertierbar}$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists B \in K^{n \times n}$$

$$AB = I_n = BA$$

$$n \in \mathbb{N} \quad K \text{ Körper}$$

$$(K^{n \times n}, +, \cdot) \quad I_n$$

$$AB \neq BA$$

$GL(n, K)$ Gruppe der invertiblen Matrizen

Satz 4.3.4

$n \in \mathbb{N}$

$$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

$\mathbb{K}$ Körper

Dann sind äquivalent:

(i) A invertierbar, d.h. $\exists B \in \mathbb{K}^{n \times n} : AB = 1 = BA$

(ii) A^T invertierbar

(iii) $\exists B \in \mathbb{K}^{n \times n} : BA = 1$

(iv) $\exists B \in \mathbb{K}^{n \times n} : AB = 1$

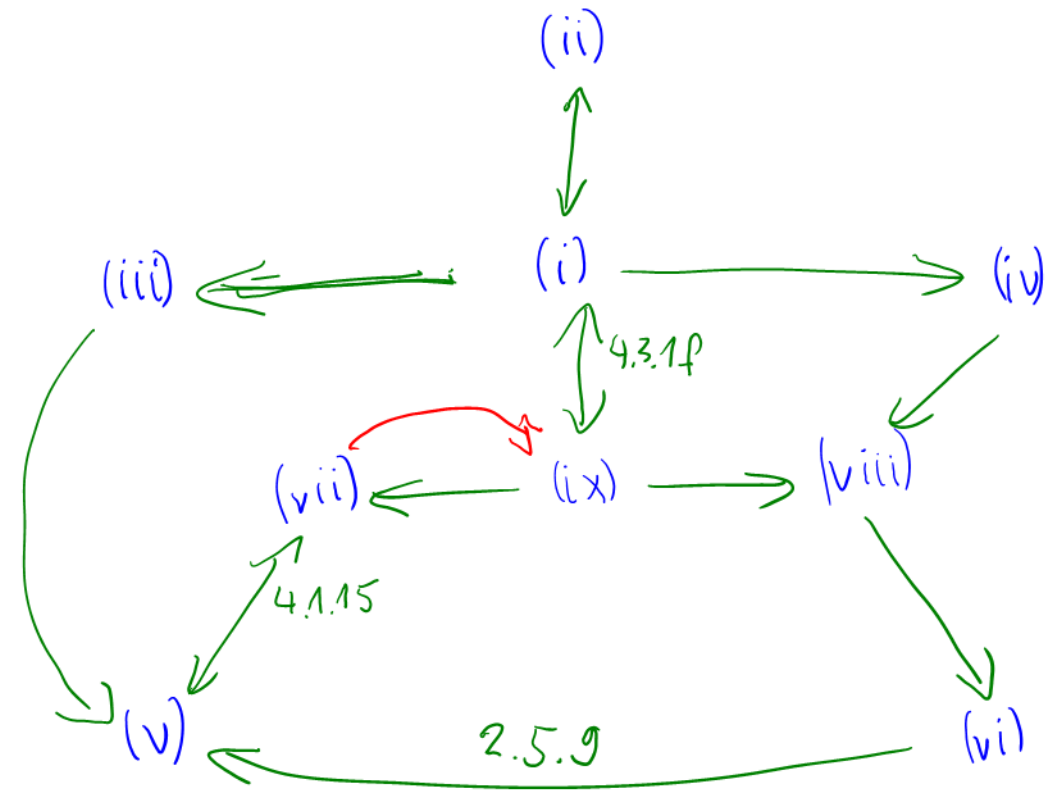
(v) $\ker A = \{0\}$

(vi) $\operatorname{rg} A = n$

(vii) $\varphi_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist injektiv

(viii) $\varphi_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist surjektiv

(ix) $\varphi_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist bijektiv



$$\operatorname{rg} A = \dim(\operatorname{Bild} \varphi_A)$$

Bw: (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$AB = \mathbb{1} = BA \quad | \quad ()^T$$

$$\Rightarrow (AB)^T = \mathbb{1}^T = (BA)^T$$

$$B^T A^T = \mathbb{1} = A^T B^T$$

$$\Rightarrow A^T \text{ invbar.} \quad (A^T)^{-1} = B^T = (A^{-1})^T$$

(iii) $\Rightarrow$ (v): $BA = \mathbb{1}.$

(z.z: $\ker A = \{0\}$)

Sei $x \in \ker A$

(z.z: $x=0$)

$$Ax = 0$$

$$BAx = 0 \Rightarrow \mathbb{1}x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \checkmark$$

(iv) $\Rightarrow$ (viii)

$$AB = \mathbb{1}$$

$$\varphi_A: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$x \longmapsto Ax$$

Sei $y \in \mathbb{K}^n$.

$$x := By$$

$$Ax = ABy = \mathbb{1}y = y$$

(z.z. φ_A surjektiv)

$$(z.z.: \exists x \in \mathbb{K}^n: Ax = y)$$

✓

$$(vi) \Rightarrow (v)$$

$$\operatorname{rg} A = n$$

$$(z.z: \ker A = \{0\})$$

2.5.9
 $\Rightarrow$

$$\underbrace{\dim \operatorname{Bild} A}_{\operatorname{rg} A} + \dim \ker A = \underbrace{\dim \mathbb{K}^n}_n$$

$$\operatorname{rg} A + \dim \ker A = n$$

$$n + \dim \ker A = n \Rightarrow \dim \ker A = 0 \Rightarrow \ker A = \{0\}.$$

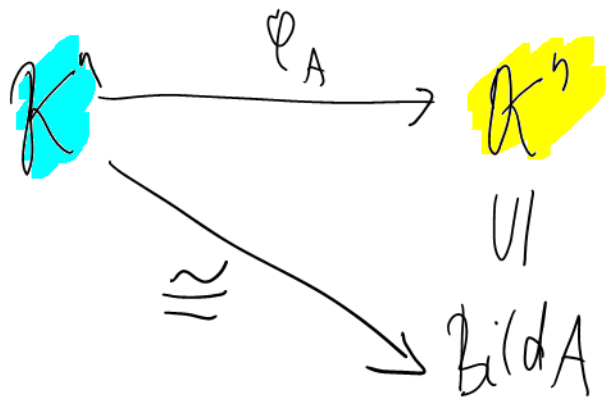
$$\varphi_A: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$(vii) \Rightarrow (ix): \varphi_A: x \mapsto Ax: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \text{ injektiv.}$$

z.z: φ_A bijektiv

$$\operatorname{Bild}(\varphi_A) = \operatorname{Bild}(A)$$

$$\varphi_A:$$



$$\text{Bild } A \cong \mathbb{K}^b$$

$$\dim \text{Bild } A = \dim \mathbb{K}^n$$

$$\dim \text{Bild } A = n$$

$\text{Bild } A$ ist n -dim. UVR vom n -dim VR $\mathbb{K}^n$.

$$\xrightarrow{4.2.10} \text{Bild } A = \mathbb{K}^n.$$

(Das funktioniert nur, weil

$$h = n)$$

Beispiel 4.3.5 (2×2) -Matrizen $\mathbb{K}$ Körper

$$a, b, c, d \in \mathbb{K}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Trick:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}_B = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{1}}$$

1. Fall: $ad-bc \neq 0$

$$A B = (ad-bc) \mathbb{1}$$

$$\frac{1}{ad-bc} A B = \mathbb{1}$$

$$A \left(\frac{1}{ad-bc} B \right) = \mathbb{1}.$$

$$\Rightarrow A \text{ invertierbar mit } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. Fall: $ad-bc=0$

$$AB = \underbrace{(ad-bc)}_{=0} \mathbb{1} \Rightarrow AB = 0$$

Wenn A invertierbar wäre

$$\Rightarrow A^{-1}AB = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a=b=c=d=0 \Rightarrow \underline{A=0.}$$

$\leadsto$ A nicht invertierbar.

Wenn $ad-bc=0$ dann A nicht invertierbar

$ad-bc \neq 0$ dann A invertierbar
mit $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$

Wie findet man Inverse?

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Gesucht: $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\boxed{AX = I}$$

$$A \underbrace{\begin{matrix} x_1 & x_2 & & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{matrix}}_X = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$\boxed{Ax = b}$$

$$Ax_1 = e_1 \rightsquigarrow x_1$$

$$Ax_2 = e_2 \rightsquigarrow x_2$$

$$Ax_n = e_n \rightsquigarrow x_n$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Gesucht: $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$AX = \mathbb{1}.$$

$$\underline{A} \quad \underline{\mathbb{1}}$$

-4	3	-1		1	0	0
-4	1	2		0	1	0
-1	0	1		0	0	1

$$AX = I$$

-1	0	1		0	0	1
-4	1	2		0	1	0
-4	3	-1		1	0	0

1	0	-1		0	0	-1
-4	1	2		0	1	0
-4	3	-1		1	0	0

1	0	-1		0	0	-1
0	1	-2		0	1	-4
-4	3	-1		1	0	0

1	0	-1		0	0	-1
0	1	-2		0	1	-4
0	3	-5		1	0	-4

1	0	-1		0	0	-1
0	1	-2		0	1	-4
0	0	1		1	-3	8

1	0	0		1	-3	7
0	1	-2		0	1	-4
0	0	1		1	-3	8

1	0	0		1	-3	7
0	1	0		2	-5	12
0	0	1		1	-3	8

$$\rightarrow \text{rg } A = 3 \iff A \text{ invertible.}$$

$$IX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

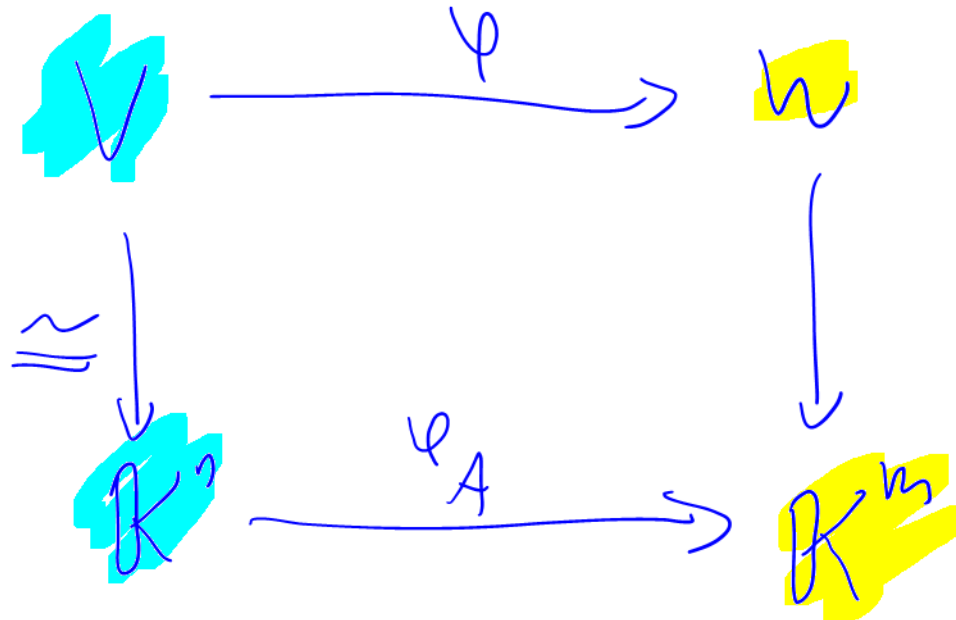
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & -5 & 12 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

(mehr Beispiele für Inverse von Matrizen
am Montag in der Übung)

V, W endlichdim.

$$V \cong \mathbb{R}^n$$

$$W \cong \mathbb{R}^m$$



$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

4.3.9 Definition

K Körper

V K -Vektorraum mit $\dim V = n \in \mathbb{N}_0$

(a) Eine **geordnete Basis** $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V ist ein n -Tupel aus n verschiedenen Vektoren, so dass $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V ist.

(b) Es sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine geordn. Basis von V .

Dann ist nach 4.2.8

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{\quad} & V \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \sum_{k=1}^n x_k b_k \end{array}$$

ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$(\cdot)_B : \left(\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & K^n \\ v = \sum_{k=1}^n x_k b_k & \longmapsto & (v)_B := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$(v)_B \in K^n$ ist der Koordinatenvektor von v
zur geordh. Basis B .

Beispiel 4.3.10

$$V = \mathbb{K}^n$$

$\mathbb{K}$ Körper

a)

$$E = (e_1, \dots, e_n)$$

geordnete Standardbasis

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \approx x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$(X)_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X$$

$$b) \quad V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$K = \mathbb{R}$$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A)_B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$(A)_C = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(mehr dazu im Skript)

$$c) \quad V = \mathbb{C} \quad , \quad K = \mathbb{R}$$

$$B = (1, i)$$

$$z = a + ib \quad \Rightarrow \quad (z)_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

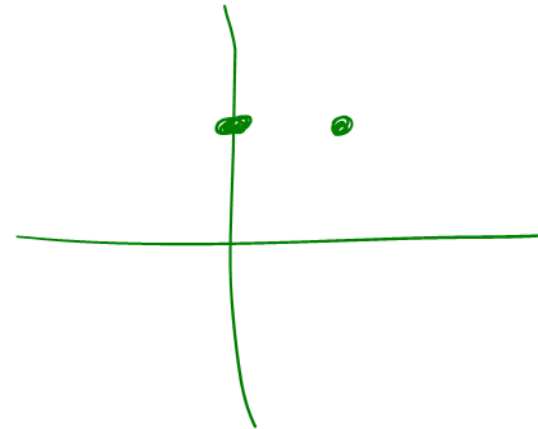
$$= a \cdot 1 + b \cdot i$$

$$C = (1+i, i)$$

$$z = a + ib$$

$$= a(1+i) + (b-a)i$$

$$(z)_C = \begin{pmatrix} a \\ b-a \end{pmatrix}$$



$$(f) \quad V = \mathbb{K}^3$$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (c-b) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-a) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} c-b \\ b-a \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3.$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Satz 4.3.11

K Körper

V, W endl. dim K -VR.

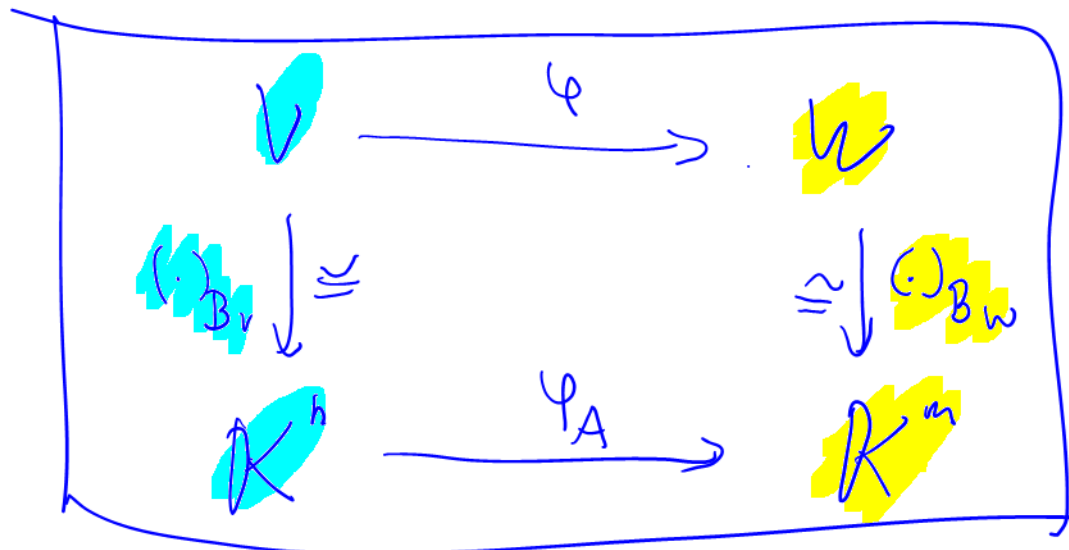
$$n = \dim V$$

$$m = \dim W$$

B_V geordn. Basis von V

B_W geordn. Basis von W .

(a) $A \in K^{n \times m}$, $\varphi_A: K^n \rightarrow K^m$.



Dann ist die Abb.

$$\varphi: V \rightarrow W$$

$$\varphi = (\cdot)_{B_W}^{-1} \varphi_A \circ (\cdot)_{B_V}$$

linear.

In den Spalten von A stehen die
 Bilder der Basisvektoren von B_v unter φ ,
 dargestellt zur Basis B_w :

$$A = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c} (\varphi(b_1))_{B_w} & (\varphi(b_2))_{B_w} & \dots & (\varphi(b_n))_{B_w} \end{array} \right)}_n$$

$$B_v = (b_1, \dots, b_n)$$

b) Für jede lineare Abb. $\varphi: V \rightarrow W$
gibt es eine eindeutige Matrix $A \in K^{m \times n}$

mit

$$\forall v \in V \quad (\varphi(v))_{B_W} = A (v)_{B_V}$$

Diese Matrix A heißt **Darstellungsmatrix** von φ
bzgl. B_V und B_W

$$M_{B_W, B_V}(\varphi) := A$$

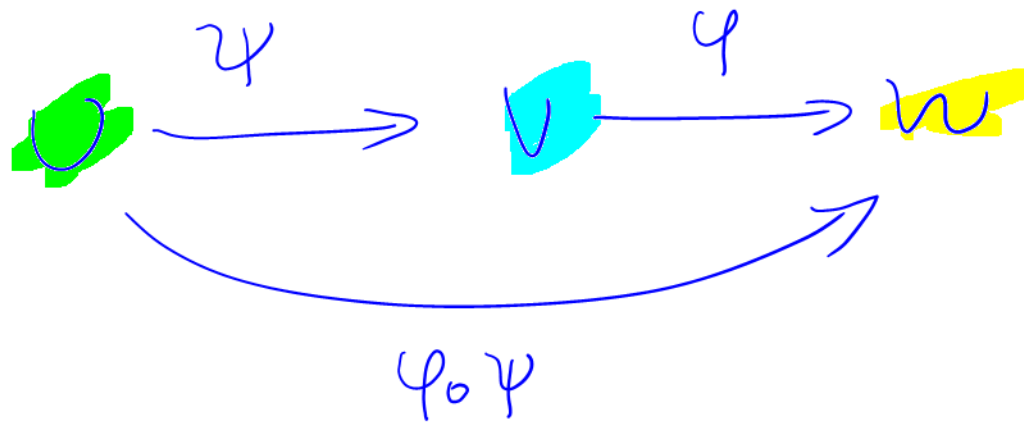
$m \times n$

$$(\varphi(v))_{B_W} = M_{B_W, B_V}(\varphi) \cdot (v)_{B_V}$$

c)

 U

Vektorraum mit geordn. Basis

 B_U V B_V W B_W $\dim U = p$ $\dim V = n$ $\dim W = m$ 

$$M_{B_W, B_U}(\varphi \circ \psi) = M_{B_W, B_V}(\varphi) \cdot M_{B_V, B_U}(\psi)$$

$(m \times p)$ $(n \times n)$ $(n \times p)$

d)

$$M_{B_v, B_v}(\text{id}_v) = \mathbb{1}_n$$

e)

$$\text{Hom}_K(V, W) \longrightarrow K^{n \times n}$$

$$\varphi \longmapsto M_{B_w, B_v}(\varphi)$$

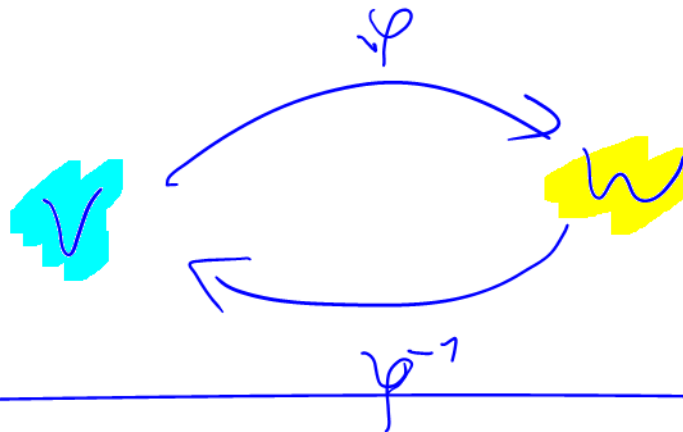
'ist ein Isomorphismus
von K -VR.

f) $\varphi: V \rightarrow W$ bijektiv (also ein Iso von VR)



$m=n$ und $M_{B_W, B_V}(\varphi)$ invertierbar

$$\left(M_{B_W, B_V}(\varphi) \right)^{-1} = M_{B_V, B_W}(\varphi^{-1})$$



g)

$$\text{End}_K(V) = \text{Hom}_K(V, V)$$

ist ein Ring mit $+$ und $\circ$

Dieser Ring ist isomorph zu $(K^{n \times n}, +, \cdot)$

$$\text{End}_K(V) \longrightarrow K^{n \times n}$$

$$\varphi \longmapsto M_{B_V, B_V}(\varphi)$$

Def. 4.3.12:

V

Vektorraum

$$\dim V = n \in \mathbb{N}$$

K
Körper.

B, C

geordn. Basen von V

$$M_{C,B}(\text{id}_V)$$

heißt man

Basenwechselmatrix

von B zu C .

$$M_{C,B}(\text{id}) \text{ invertierbar}$$

mit

$$\left(M_{B,C}(\text{id}) \right)^{-1} = M_{C,B}(\text{id}).$$

z.B.:

$$B = \left(\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Gesucht: $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$ -linear

mit $\varphi \left(\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -168 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 126 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -42 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{E, B}(\varphi) = \begin{pmatrix} -168 & 126 & -42 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

$$M_{B,E}(\text{id}) = \left(M_{E,B}(\text{id}) \right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & -5 & 12 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

siehe
Bsp oben

$$M_{E,E}(\varphi) = M_{E,B}(\varphi) \cdot M_{B,E}(\text{id})$$

$$\begin{pmatrix} -168 & 126 & -42 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & -5 & 12 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Abbildung φ ist also

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42x_1 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$