

Lineare Algebra I

für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2023/24

V, W Vektorräume über K

K Körper

$\dim V = n$ $\dim W = m$ $n, m \in \mathbb{N}_0$

B_V geordn. Basis von V

B_W geordn. Basis von W

$\varphi: V \rightarrow W$ K -linear

$M_{B_W, B_V}(\varphi) \in K^{m \times n}$

$$\forall v \in V \quad (\varphi(v))_{B_W} = M_{B_W, B_V}(\varphi) (v)_{B_V}$$


Z.B.:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{geordn. Basis von } V$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{geordn. Basis von } V$$

$$\varphi: \left(\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array} \right) \quad \mathbb{R}\text{-lineare Abbildung}$$

Gesucht: $M_{cc}(\varphi)$

1. Möglichkeit (direkt):

- Nimm den ersten Basisvektor aus C , also $c_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$
- Wende die Abbildung φ darauf an:
 $\varphi(c_1) = \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$
- Stelle das Ergebnis bzgl der Basis C dar:
 $\varphi(c_1) = \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{6}{47} c_1 + \frac{133}{47} c_2$
- Schreibe diese Skalare in die 1. Spalte der Matrix $M_{ee}(\varphi)$

$$\varphi: \left(V \longrightarrow V \right)$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$C = (c_1, c_2)$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Nimm den zweiten Basisvektor aus C , also $c_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Wende die Abbildung φ darauf an:
 $\varphi(c_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
- Stelle das Ergebnis bzgl der Basis C dar:
 $\varphi(c_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{19}{47} c_1 + \left(-\frac{53}{47}\right) c_2$
- Schreibe diese Skalare in die 2. Spalte der Matrix $M_{ee}(\varphi)$

$$M_{ee}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{6}{47} & -\frac{19}{47} \\ \frac{133}{47} & -\frac{53}{47} \end{pmatrix}$$
$$\in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

2. Möglichkeit:

Bestimme zuerst

$$M_{B,B}(\varphi)$$

Bestimme die

Basiswechselmatrizen

$$M_{B,C}(\text{id}) \quad \text{und} \quad M_{C,B}(\text{id}).$$

Berechne

$$M_{C,C}(\varphi) = \underbrace{M_{C,B}(\text{id})}_{\text{wavy}} \cdot \underbrace{M_{B,B}(\varphi)}_{\text{double underline}} \underbrace{M_{B,C}(\text{id})}_{\text{wavy}}$$

$$M_{B,B}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Nimm den ersten Basisvektor aus B , also $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Wende die Abbildung φ darauf an:
 $\varphi(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Stelle das Ergebnis bzgl der Basis B dar:
 $\varphi(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 b_1 + (-1) b_2$
- Schreibe diese Skalare in die 1. Spalte der Matrix $M_{B,B}(\varphi)$

- Nimm den zweiten Basisvektor aus B , also $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Wende die Abbildung φ darauf an:
 $\varphi(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Stelle das Ergebnis bzgl der Basis B dar:
 $\varphi(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 b_1 + (-1) b_2$
- Schreibe diese Skalare in die 2. Spalte der Matrix $M_{B,B}(\varphi)$

$$B = (b_1, b_2)$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Basiswechselmatrix von C nach B

- Nimm den ersten Basisvektor aus C , also $c_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$
- Wende id darauf an.
- Stelle c_1 bzgl der Basis B dar:
 $c_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} = 9b_1 + (-13)b_2$
- Schreibe diese Skalare in die 1. Spalte der Matrix $M_{B,C}(\varphi)$

$$B = (b_1, b_2)$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C = (c_1, c_2)$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Nimm den zweiten Basisvektor aus C , also $c_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Wende id darauf an.
- Stelle c_2 bzgl der Basis B dar:
 $c_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -5b_1 + 2b_2$
- Schreibe diese Skalare in die 1. Spalte der Matrix $M_{B,C}(\varphi)$

$$M_{B,C}(\text{id}) = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -13 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{CB}^{(id)} = \left(M_{BC}^{(id)} \right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -13 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{9 \cdot 2 - (-13)(-5)} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{47} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}.$$

Also:

$$M_{C,C}(\varphi) = M_{C,B}(\text{id}) \cdot M_{B,B}(\varphi) \cdot M_{B,C}(\text{id})$$

$$= -\frac{1}{47} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -13 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{47} \begin{pmatrix} 6 & -19 \\ 133 & -53 \end{pmatrix}$$

Was sagen uns die Einträge
der Basiswechselmatrizen?

$$M_{B,C}(id) = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -13 & 2 \end{pmatrix} = \left((c_1)_B \mid (c_2)_B \right)$$

$$c_1 = 9b_1 - 13b_2$$
$$c_2 = -5b_1 + 2b_2$$

$$M_{C,B}(id) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{47} & -\frac{5}{47} \\ -\frac{13}{47} & -\frac{9}{47} \end{pmatrix} = \left((b_1)_C \mid (b_2)_C \right)$$

$$b_1 = \left(-\frac{2}{47}\right)c_1 + \left(-\frac{13}{47}\right)c_2$$

$$b_2 = \left(-\frac{5}{47}\right)c_1 + \left(-\frac{9}{47}\right)c_2$$

$$(v)_C = M_{C,B}(id) (v)_B$$

$$(v)_B = M_{B,C}(id) (v)_C$$

Lemma 4.3.15

K Körper

V K -Vektorraum mit $\dim V = n$.

B geordn. Basis von V

$$S \in GL(n, K)$$

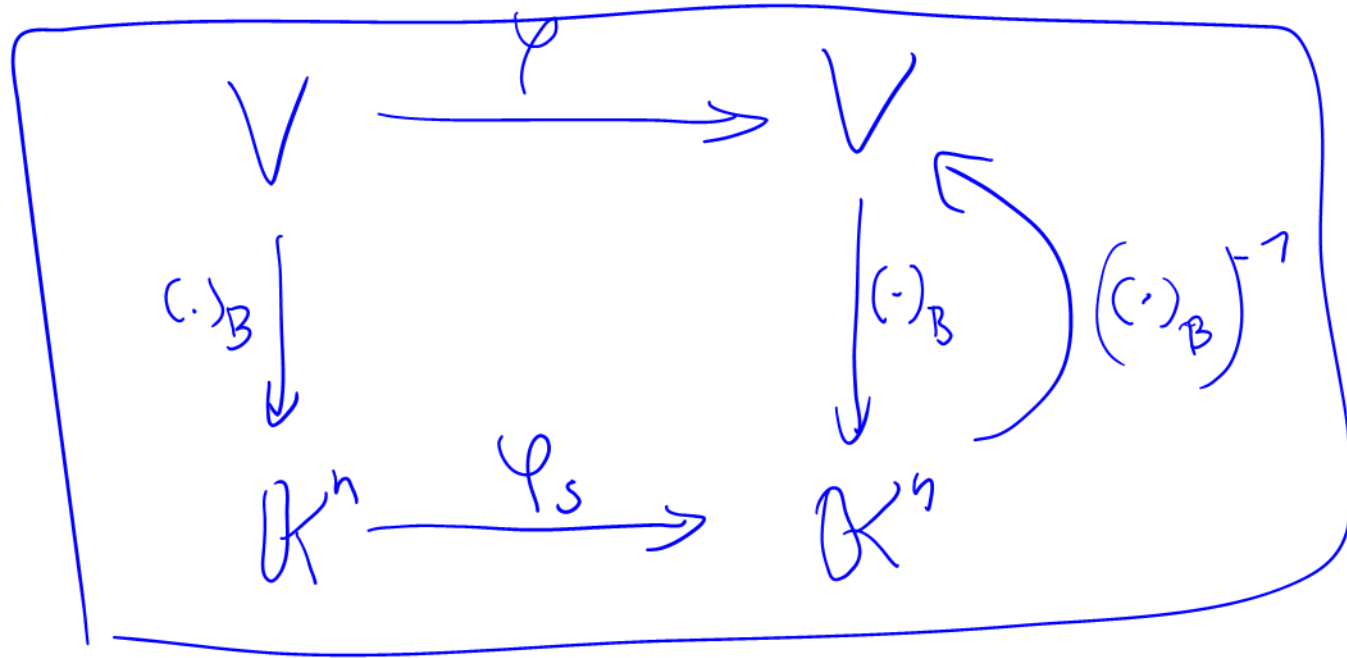
$\Rightarrow \exists C$ geordn. Basis von V

$$M_{B,C}(\text{id}_V) = S$$

Bw:

$$\varphi_S: K^n \longrightarrow K^n \quad \text{Iso, weil } S \text{ invertierbar.}$$

$$(\cdot)_B: V \longrightarrow K^n \quad \text{Iso, weil } B \text{ geordn. Basis.}$$



$$S = M_{BB}(\varphi)$$

$$\varphi: V \rightarrow V, \quad \varphi := ((\cdot)_B)^{-1} \circ \varphi_S \circ (\cdot)_B \quad \text{Isom. von Vektorr.}$$

$$B = (b_1, \dots, b_n)$$

$$C := (\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)) \quad \text{Basis von } V.$$

$$\text{Beh: } S = M_{B,C}(\text{id}_V)$$

$$S = M_{B,B}(\varphi) = M_{B,B}(\text{id} \circ \varphi)$$

$$= M_{B,C}(\text{id}) \underbrace{M_{C,B}(\varphi)}_{1}$$

$$= M_{B,C}(\text{id}) .$$



Satz 4.3.17 (Smith'sche Normalform)

K Körper

V, W endlich dim. Vektorräume über K

$$\varphi: V \longrightarrow W \quad K \text{ linear}$$

$\Rightarrow \exists B_v$ geordh. Basis von V
 $\exists B_w$ geordh. Basis von W ; $\leftarrow r$

$$M_{B_u, B_v}(\varphi) = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Diagram of } \varphi: B_u \rightarrow B_v \\ \text{with } r \text{ and } 1 \text{ labels} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram of } \varphi: B_u \rightarrow B_v \\ \text{with } r \text{ and } 1 \text{ labels} \end{array} \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r = \text{rg}(\varphi) \in \mathbb{N}_0$$

Bu. wähle ^{geord.} Basis B von V
 geord. Basis C von W

$$A = M_{C,B}(\varphi) = \begin{array}{|c|} \hline \boxed{} \\ \hline \end{array} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Gauß auf A anwenden:

$$\tilde{A} = SA$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S \in GL(n, \mathbb{R})$$

in erw. Zeilenstufenform

permutiere Spalten $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A} T \quad T \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Group $(G, \cdot)$ -Operation auf Spalten

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Smith-Normalform.}$$

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{\tilde{A}} U \quad U \in GL(n, \mathbb{R}).$$

$$= \tilde{A} T U$$

$$= S \underbrace{A T U}_{\in GL(n, \mathbb{R})}.$$



$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow SAx = Sb$$

$$Ax = b$$

$$(A^T) \underbrace{(I^T x)}_{y} = b$$

$$(A^T) y = b$$

$A, B \in K^{m \times n}$ heißen äquivalent

$$: \Leftrightarrow \exists S \in GL(m, K), T \in GL(n, K)$$

$$SAT = B$$

$$\left(\Leftrightarrow A = S^{-1} B T^{-1} \right).$$

Kor 4.3.19

Zwei Matrizen A, B sind genau dann
äquivalent, wenn

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$$

4.4 Direkte Summen und Komplemente

K Körper

Def: V_1, V_2 Vektorräume über K

$$V_1 \times V_2 := \{ (v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V \} \quad \text{direktes Produkt von VR}$$

wird mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation wieder ein K -Vektorraum.

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

$$\lambda (v_1, v_2) := (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

(Ebenso für $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ mit $r \in \mathbb{N}$)

z.B. $\boxed{\mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^3} = \{ (A, v) \mid A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, v \in \mathbb{R}^3 \}$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

z.B. (4.4.2)

$$\underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_r = \{ (x_1, \dots, x_r) \mid x_1, \dots, x_r \in \mathbb{K} \} \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^r$$

$$(x_1, \dots, x_r) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \left(0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\dim(\mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^3) = 7$$

Lemma 4.4.3

$\mathbb{K}$ Körper

V_1, V_2 Vektorräume über $\mathbb{K}$

B Basis von V_1

C Basis von V_2

$\Rightarrow \left\{ (b, 0) \mid b \in B \right\} \cup \left\{ (0, c) \mid c \in C \right\}$
ist eine Basis für $V_1 \times V_2$.

Wenn $\dim V_1 = n_1$ und $\dim V_2 = n_2$

$$\dim (V_1 \times V_2) = n_1 + n_2 .$$

Bw: Skript

Lemma 4.4.4

K Körper

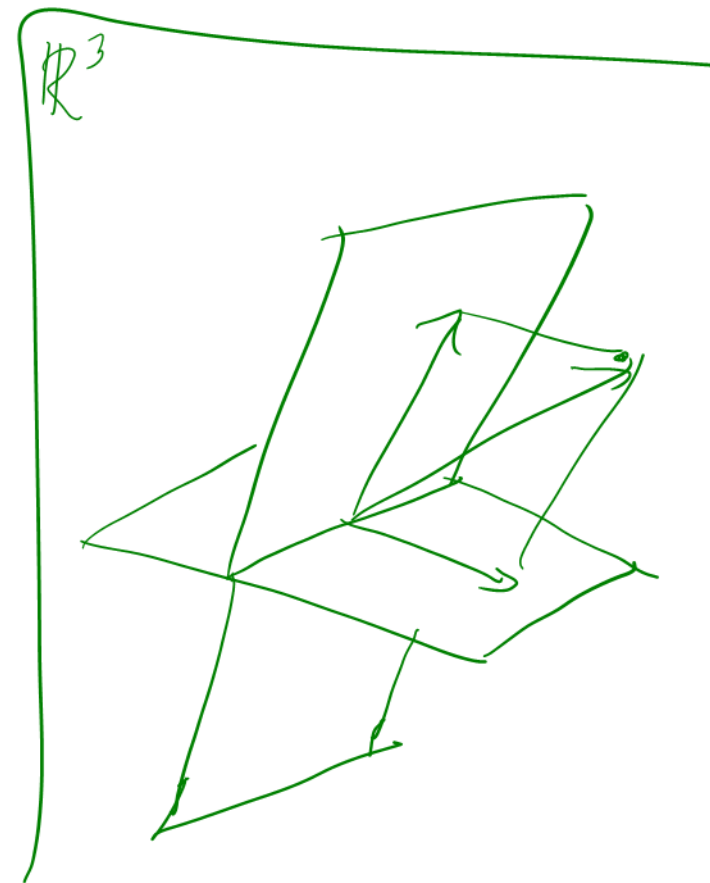
V K -Vektorraum.

$(U_j)_{j \in J}$ Familie von Untervektorräumen

$\Rightarrow \bigcap_{j \in J} U_j$ ist Untervektorraum.

Üb 3, Aufg 2

$\cup$ geht nicht Üb 3, Aufg 2



Lemma 4.4.6

K Körper

V Vektorraum über K

(a) $r \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_r \longrightarrow V, (v_1, \dots, v_r) \mapsto \sum_{j=1}^r v_j = v_1 + \dots + v_r$$

ist linear und surjektiv.

(b) $U_1, \dots, U_r$ UVR von V $r \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{U_1 \times \dots \times U_r}_r \longrightarrow V, (u_1, \dots, u_r) \mapsto \sum_{j=1}^r u_j = u_1 + \dots + u_r$$

ist linear, das Bild ist $U_1 + U_2 + \dots + U_r \subseteq V$.

(c) U, W UVR von V

$$\varphi: U \times W \longrightarrow V, (u, w) \mapsto u + w$$

ist linear, das Bild ist $U + W$, $\ker \varphi = \{(u, -u) \mid u \in U \cap W\} \cong U \cap W$

Bw (c): z.z. $\ker \varphi = \{(u, -u) \mid u \in U \cap W\}$

" $\subseteq$ ": Sei $(x, y) \in \ker \varphi$, d.h. $(x, y) \in U \times W$

$$\text{und } \varphi(x, y) = x + y = 0.$$

$$u := x \in U$$

$$y = -x$$

$$u = -y \in W.$$

$$\Rightarrow u \in U \cap W.$$

$$(x, y) = (u, -u) \text{ mit } u \in U \cap W.$$

" $\supseteq$ ": z.z.: $(u, -u) \in U \times W$, und $\varphi(u, -u) = 0$.

$$u \in U \cap W \Rightarrow u \in U.$$

$$u \in W \Rightarrow -u \in W \Rightarrow (u, -u) \in U \times W.$$

$$\varphi(u, -u) = u + (-u) = 0.$$

$$\psi: \left(\begin{array}{l} U \cap W \rightarrow \{ (u, -u) \mid u \in U \cap W \} \\ u \longmapsto (u, -u) \end{array} \right) \quad \text{Iso} \\ \text{von } U \cap W.$$

Def 4.4.7

K Körper

V K -Vektorraum.

$U_1, \dots, U_r$ Familie von Untervektorräumen

Wir sagen

" V ist die direkte Summe
der Untervektorräume $U_1, \dots, U_r$ "

$\Leftrightarrow$

Die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} U_1 \times \dots \times U_r &\longrightarrow V \\ (u_1, \dots, u_r) &\longmapsto \sum_{j=1}^r u_j = u_1 + \dots + u_r. \end{aligned}$$

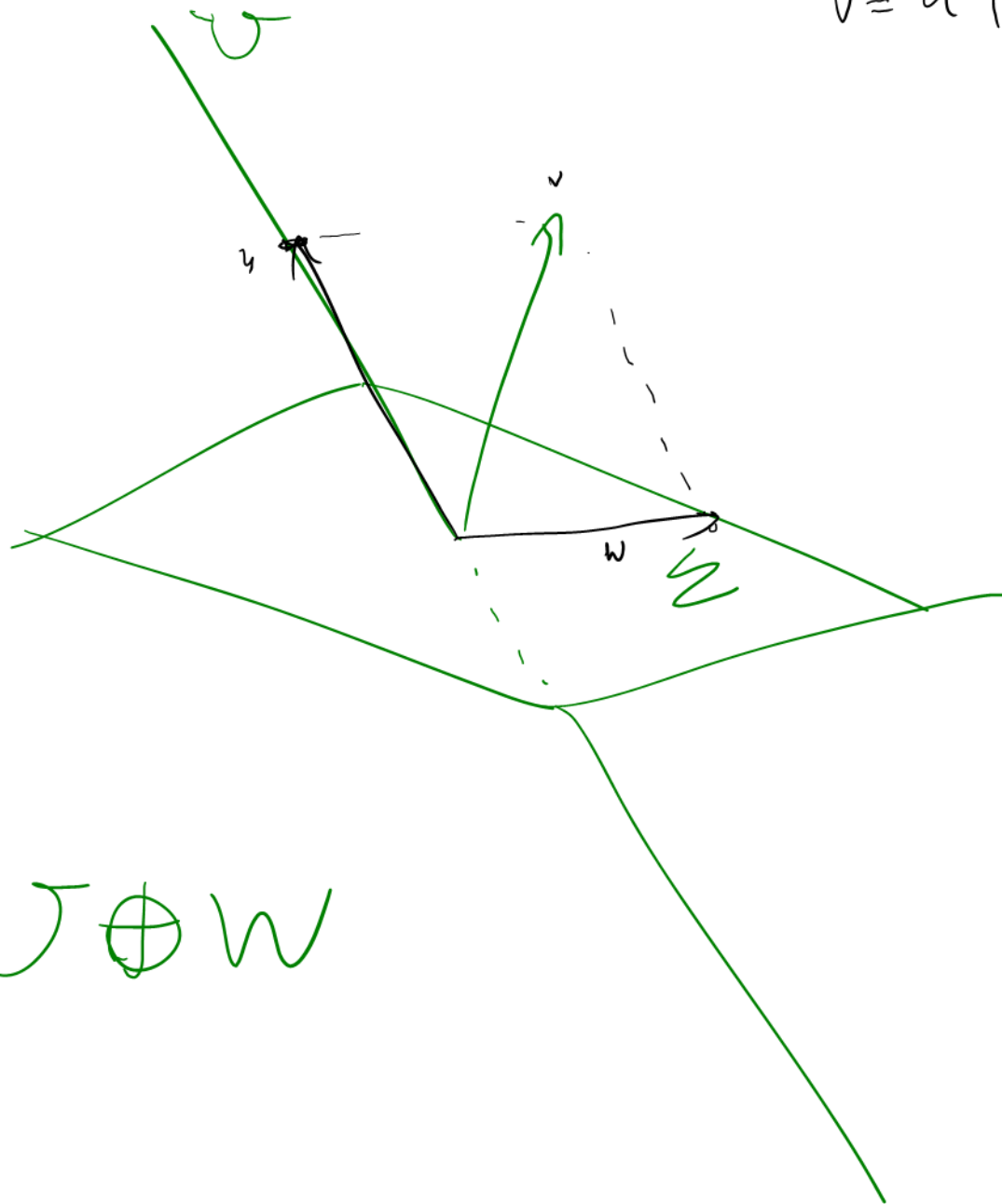
ist bijektiv, also ein Isomorphismus von K -Vektorräumen.

Notation:

$$V = \bigoplus_{j=1}^r U_j = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$$

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$v = u + w$$



$$V = U \oplus W$$

Lemma 4,4,8 (der Fall $r=2$)

K Körper

V Vektorraum über K

U, W UVR von V .

Dann gilt:

$$V = U \oplus W$$

$\Leftrightarrow$ und

$$V = U + W$$

$$U \cap W = \{0\}$$

Achtung: Es ist NICHT richtig, dass

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$$

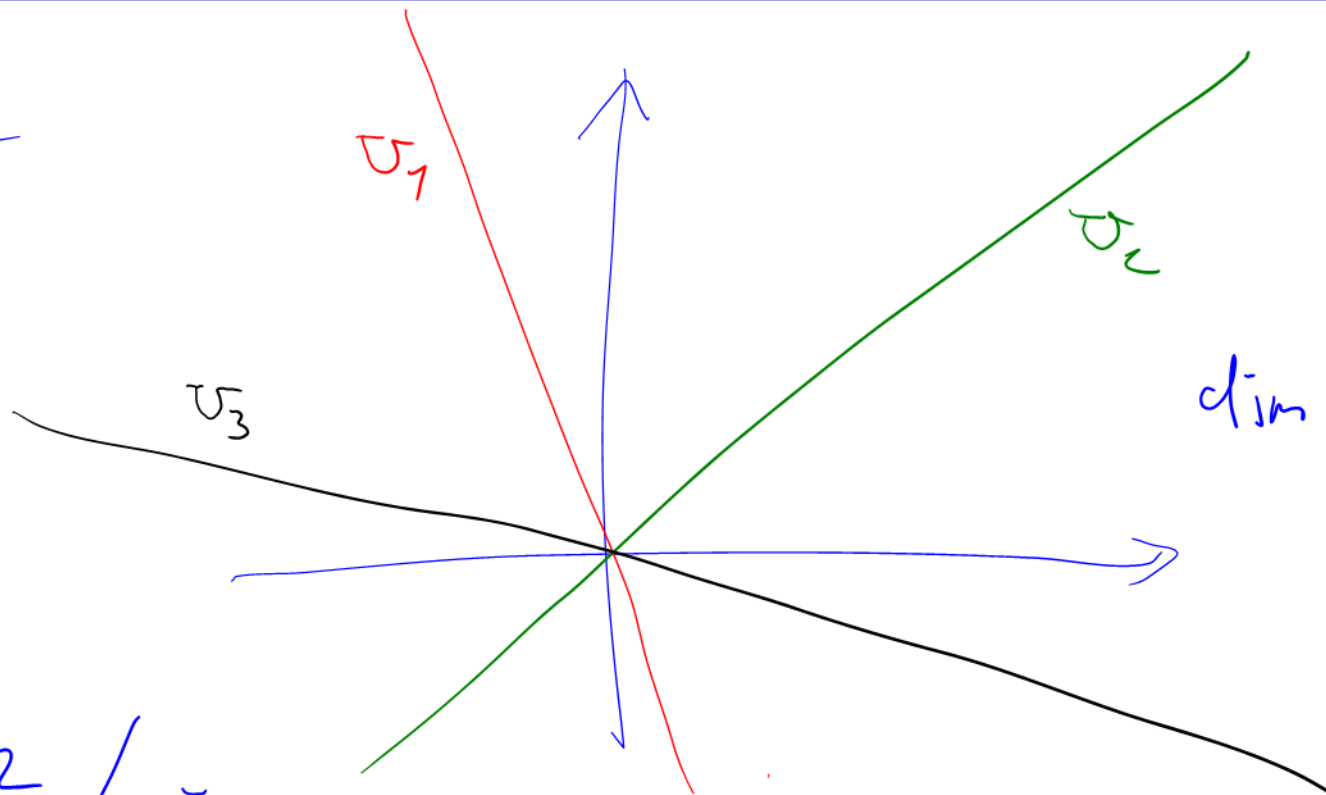
$\Leftrightarrow$

$$V = U_1 + U_2 + U_3$$

und $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$



$\mathbb{R}^2$



$$\dim(U_1 + U_2 + U_3) = 3$$

$$\mathbb{R}^2 \neq U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$$

Def 4.4.9 (Vektorraumkomplement)

V Vektorraum über K

U Untervektorraum von V

Ein $U \subset V$ $W \subseteq V$ heiße

Vektorraumkomplement von U

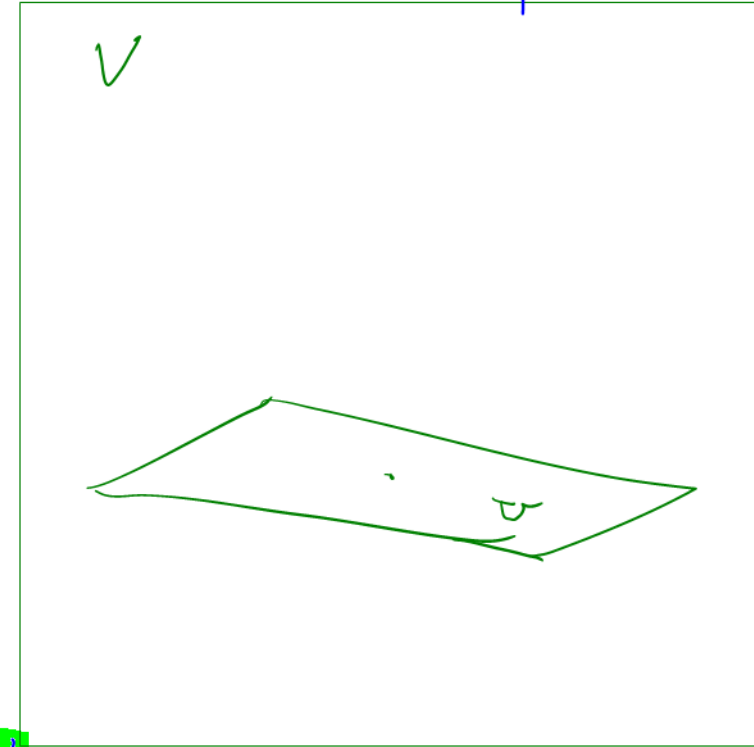
oder

zu U komplementärer Untervektorraum,

wenn $V = U \oplus W$, d.h.

wenn sich jedes $v \in V$ eindeutig schreiben lässt als $v = u + w$
mit $u \in U$ und $w \in W$

K Körper



Satz 4.4.11

K Körper

V endlich-dimensionaler K -Vektorraum
 U Untervektorraum von V

$\Rightarrow$

$\exists W$ Untervektorraum von V

mit $V = U \oplus W$

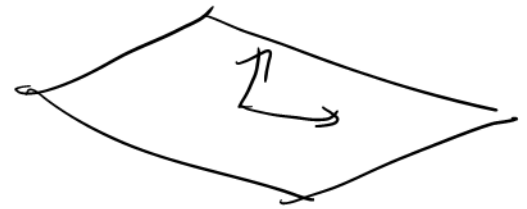
$$\dim W = \dim V - \dim U$$

Achtung: W ist im Allgemeinen NICHT eindeutig.

Bw: Wähle Basis $(b_1, \dots, b_r)$ von U .

Setze zu Basis

$(\underbrace{b_1, \dots, b_r}_{\text{von } U} \underbrace{c_1, \dots, c_s}_{\text{fort.}})$



$$W := \text{LH} (c_1, \dots, c_s).$$

$$\dim W = s$$

$$r + s = n.$$

$$\dim U = r$$

$$\dim W = n - r.$$