# Lineare Algebra I
# für die Fachrichtung Informatik
# Wintersemester 2023/24

# Quotientenräume

Erinnerung: Def: (3.4.6)

Es sei $X$ eine Menge.

(a) $\sim \subseteq X \times X$ heißt **Relation** auf $X$
(wir schreiben $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; (x,y) \in \sim$)

(b) Eine Relation $\sim$ heißt **reflexiv**, wenn $\forall x \in X: \; x \sim x$

(c) Eine Relation $\sim$ heißt **symmetrisch**, wenn
$\forall x,y \in X: \; x \sim y \;\Rightarrow\; y \sim x$

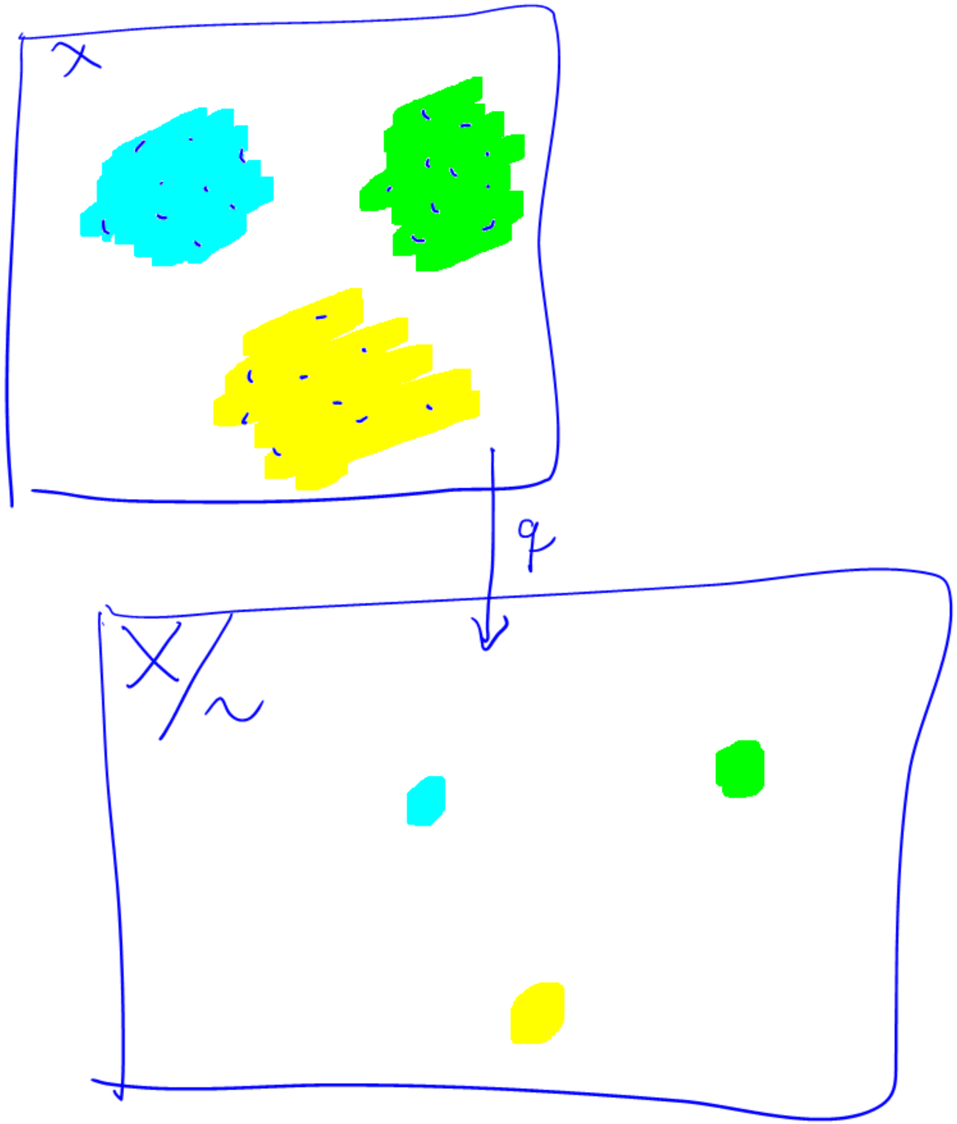
(d) Eine Relation $\sim$ heißt **transitiv**, wenn
$\forall x,y,z \in X: \; (x \sim y \text{ und } y \sim z) \;\Rightarrow\; x \sim z$

(e) Eine Relation heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

(f) Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ und $x \in X$.
Dann heißt $[x]_\sim := \{ y \in X \mid x \sim y \}$ **Äquivalenzklasse** von $x$.

# Quotientenräume

Erinnerung:

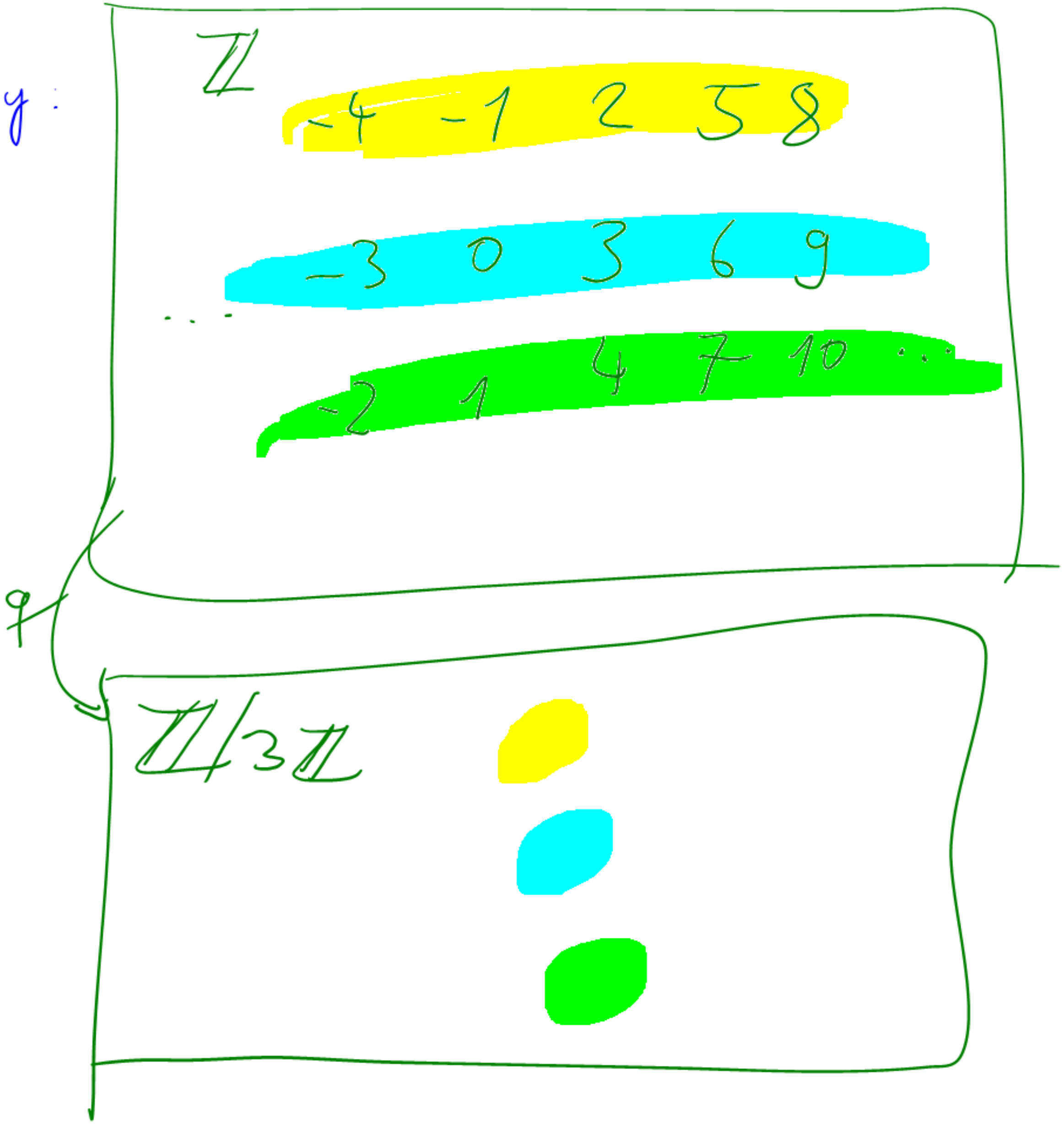



$$x \sim y \iff q(x) = q(y) \iff [x] = [y]$$

# Quotientenräume

Erinnerung:

z.B.



## Satz 4.5.1

$V$ $\mathbb{K}$-Vektorraum

$U \subseteq V$ UVR

(a) Definiere Relation $\equiv_U$ auf $V$

$$x \equiv_U y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \in U$$

$\Longrightarrow$ $\equiv_U$ ist Äquivalenzrelation.

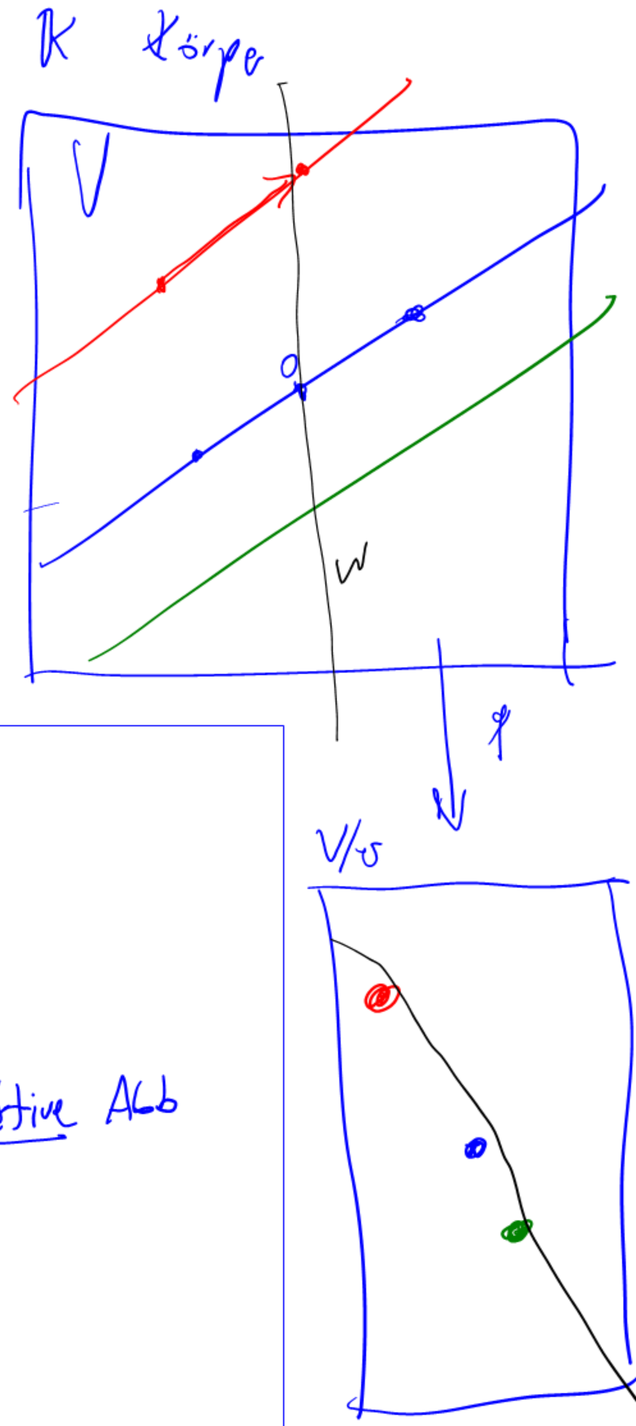
(b) Auf der Quotientenmenge

$$V/U := V/{\equiv_U}$$

gibt es genau eine $\mathbb{K}$-Vektorraum-Struktur, sodass die <u>surjektive</u> Abb

$$\varphi : V \longrightarrow V/U$$
$$x \longmapsto [x]_U$$

eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung wird.



$$V \xrightarrow{q} V/U$$

$$q(x) = [x]$$

$$[x] + [y] = [x+y]$$

$$\lambda [x] = [\lambda x]$$

$$\boxed{[x] = [y] \iff x \equiv_U y \iff x - y \in U}$$

Bw (a): z.z: $\equiv_U$ ist reflexiv, d.h. $\forall x \in V \quad x \equiv_U x$, d.h.

$x - x \in U$.

$x - x = 0 \in U$, weil $U$ UVR.

$\Rightarrow x \equiv_U x$.

---

z.z $\equiv_U$ ist symmetrisch, d.h. $\forall x, y \in V \quad x \equiv_U y \Longrightarrow y \equiv_U x$

$x, y \in V$

$x \equiv_U y$ z.z: $y \equiv_U x$.

$x - y \in U$

$(-1)(x-y) \in U$, weil $U$ UVR.

$y - x \in U$

$y \equiv_U x$.

z.z: $\equiv_U$ ist transitiv, d.h. $\forall x,y,z \in V$

$x \equiv_U y \;,\; y \equiv_U z \implies x \equiv_U z.$

Wissen: $x \equiv_U y$, d.h. $x-y \in U$

$y \equiv_U z$, d.h. $y-z \in U$

(z.z: $x \equiv_U z$, d.h. $x-z \in U$)

$\underbrace{(x-y)+(y-z)} \in U$, weil $U$ UVR.

$\implies x-z \in U$

$\implies x \equiv_U z$ .

b) z.z.: $\exists \; + : V/U \times V/U \longrightarrow V/U$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V/U \longrightarrow V/U,$$

so dass $(V/U, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-VR ist

und $q : V \longrightarrow (V/U, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-linear wird.

- Diese Abbildungen $+$ und $\cdot$ sind eindeutig.

---

Aus $q : V \to V/U$ linear, folgt: $[x] + [y] = [x+y]$

$$\lambda \cdot [x] = [\lambda x]$$

Wenn $+$ und $\cdot$ mit den geforderten Eigenschaften existieren, sind sie eindeutig.

Bleibt: Zeige Existenz.

Definiere:

$$+ : V/U \times V/U \longrightarrow V/U$$
$$([x]_U, [y]_U) \longmapsto [x+y]_U$$

für $x, y \in V$

Ist das wohldefiniert?

z.z: $[x+y]$ hängt nur von $[x]$ und $[y]$ ab und nicht von $x$ und $y$.

$[x] = [x']$
$[y] = [y']$

$x, x', y, y' \in V$.

z.z: $[x+y] = [x'+y']$.

$$[x] = [x'] \iff x \equiv_U x' \iff \underline{x - x' \in U}$$

$$[y] = [y'] \iff y \equiv_U y' \iff \underline{y - y' \in U}.$$

z.z: $x + y \equiv_U x' + y'$

$$(x+y) - (x'+y')$$

$$= \underbrace{(x - x')}_{\in U} + \underbrace{(y - y')}_{\in U} \in U \text{, weil } U \text{ UVR.}$$

---

$$\cdot : K \times V/U \longrightarrow V/U$$

$$(\lambda, [x]) \longmapsto [\lambda x]$$

z.z: wohldef.

z.z: $[x] = [x'] \Longrightarrow [\lambda x] = [\lambda x']$

$x - x' \in U$. z.z: $\lambda x - \lambda x' \in U$.

$\underbrace{\lambda(x-x')}$ $\in U$, weil $U$ UVR

$\lambda x - \lambda x' \in U$.

---

Wissen: $+ : V/U \times V/U \longrightarrow V/U \qquad [x] + [y] = [x+y]$

$\cdot : \mathbb{K} \times V/U \longrightarrow V/U \qquad \lambda \cdot [x] = [\lambda x]$

wohldef.

weil $V$ ein $\mathbb{K}$-VR ist, gelten die VR-Axiome direkt auch für $V/U$.

z.B.: $\left([x] + [y]\right) + [z] = [x+y] + [z]$

$= [(x+y)+z] = [x+(y+z)] = [x] + [y+z]$

$= [x] + ([y] + [z])$

**Anmerkung:** $V$ Vektorraum über $\mathbb{K}$

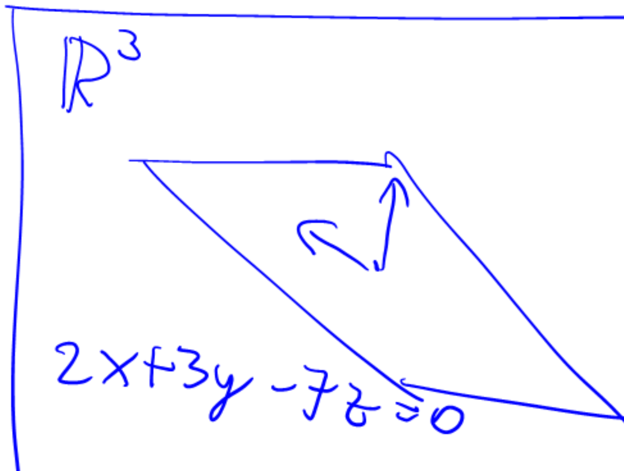
$U$ UVR.

$$q: \begin{pmatrix} V \longrightarrow V/U \\ x \longmapsto [x] \end{pmatrix} \quad \mathbb{K}\text{-linear}$$

$$\ker(q) = \{x \in V \mid [x] = [0]\} = \{x \in V \mid x - 0 \in U\} = U.$$

---

**Also:** Jeder UVR ist Kern einer linearen Abbildung.



$V = \mathbb{K}^n \qquad U \subseteq V \quad$ UVR.

$U = \ker(q) \qquad q : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n/U \quad$ surj.

endl. dim. $\qquad$ endl. dim.

Wähle geord. Basis $B$ auf $\mathbb{K}^n/U$

$$A = M_{B,E}(q) \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

$m = \dim(\mathbb{K}^n/U)$.

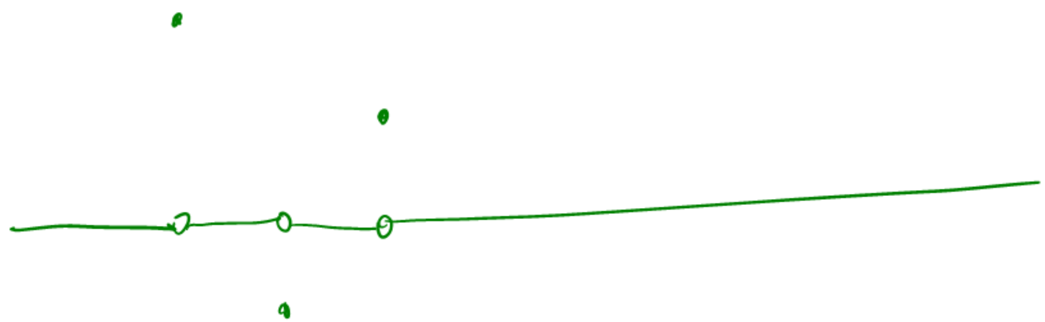
Lösungsmenge von $\boxed{Ax = 0}$ ist $U$.

z.B.: $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\quad U = \mathbb{R}^{(\mathbb{R})} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ ist nur an endlich vielen Stellen nicht $0 \}$

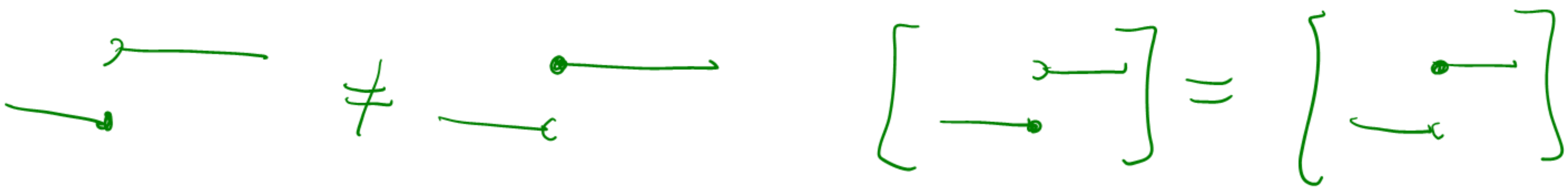
$f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$f \equiv_U g$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{f = g \text{ bis auf endl. viele Ausnahmen}}$



$f = g +$ „klein"



z.B.: $V = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ beliebig oft diffbaren.

$U = LH(1)$ = Alle konstanten Funktionen.

In $V/U$ identifizieren wir Funktionen, wenn sie sich nur durch eine Konstante unterscheiden.

---

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V/U \\ f &\longmapsto [F] \end{aligned}$$ mit $F' = f$

$$\boxed{\int \cos dx = \sin x + C}$$

## Satz 4.5.5

$\mathbb{K}$ Körper

$V, W, Q$ $\mathbb{K}$-Vektorräume

$\varphi : V \to W$ linear $\qquad q : V \to Q$ linear und surjektiv.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"'] & W \\
Q \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

(i) $\boxed{\ker(q) \subseteq \ker(\varphi)}$

$\Longleftrightarrow$ (ii) $\boxed{\exists\ \overline{\varphi} : Q \to W \quad \text{mit} \quad \overline{\varphi} \circ q = \varphi, \quad \overline{\varphi}([x]) = \varphi(x)}$

Wenn $\overline{\varphi}$ existiert, dann ist $\varphi$ linear.

Bild $\varphi$ = Bild $\overline{\varphi}$

(ii) $\Rightarrow$ (i):

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"'] & W \\
Q \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Beh: $\overline{\varphi}$ linear.

$$\overline{\varphi}(a+b) = \overline{\varphi}(q(x)+q(y)) = \overline{\varphi}(q(x+y)) = \overline{\varphi}\circ q(x+y) = \varphi(x+y)$$

$$= \varphi(x)+\varphi(y) = \overline{\varphi}\circ q(x) + \overline{\varphi}\circ q(y) = \overline{\varphi}(a)+\overline{\varphi}(b).$$

$$\overline{\varphi}(\lambda a) = \overline{\varphi}(\lambda q(x)) = \overline{\varphi}(q(\lambda x)) = \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) = \lambda \overline{\varphi}(q(x)) = \lambda \overline{\varphi}(a).$$

Sei $x \in \ker(q)$.

$$\varphi(x) = (\overline{\varphi}\circ q)(x) = \overline{\varphi}(q(x)) = \overline{\varphi}(0) = 0.$$

$$\Longrightarrow x \in \ker(\varphi)$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: $\ker(q) \subseteq \ker(\varphi)$, d.h. $\forall x \; q(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0$.

Def: $\overline{\varphi} : \left( \begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & W \\ q(x) & \longmapsto & \varphi(x) \end{array} \right)$

z.z: $\overline{\varphi}$ wohldef.

$q(x) = q(x')$.

z.z: $\varphi(x) = \varphi(x')$

$q(x) - q(x') = 0$

$q(x - x') = 0$

$x - x' \in \ker(q) \subseteq \ker \varphi$

$\Rightarrow \varphi(x - x') = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x')$. $\blacksquare$

Kor 4.5.7 (Homomorphiesatz)  $\mathbb{K}$ Körper.

$\varphi : V \to W$  $V, W$ $\mathbb{K}$-VR.

$$\boxed{\operatorname{Bild}(\varphi) \cong V/_{\ker \varphi}}$$

Die Abbildung

$$\bar{\varphi} : \begin{pmatrix} V/_{\ker\varphi} \longrightarrow \operatorname{Bild}(\varphi) \\ [x]_{\ker\varphi} \longmapsto \varphi(x) \end{pmatrix}$$

ist ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"'] & W \\ V/_{\ker\varphi} \arrow[r, "\bar{\varphi}", "\cong"'] & \operatorname{Bild}\varphi \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

$$\varphi = \underset{\text{inj.}}{\iota} \circ \underset{\text{bij.}}{\bar{\varphi}} \circ \underset{\text{surj.}}{q}$$

$$\iota : \begin{pmatrix} \operatorname{Bild}(\varphi) \longrightarrow W \\ x \longmapsto x \end{pmatrix}$$

Bw:

$$\tilde{\varphi} : \begin{pmatrix} V \longrightarrow \mathrm{Bild}\,\varphi \\ x \longmapsto \varphi(x) \end{pmatrix} \qquad \tilde{\varphi} = \varphi\big|^{\mathrm{Bild}\,\varphi}$$

ist surjektiv und linear

$$\varphi = \iota \circ \tilde{\varphi} .$$

inj.      surj.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "q"] & \mathrm{Bild}\,\varphi \\ V/\ker(\varphi) \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\ker(q) = \ker(\varphi) = \ker(\tilde{\varphi})$$

$$\overset{4.5.5.}{\Longrightarrow} \exists\, \overline{\varphi} : V/\ker\varphi \longrightarrow \mathrm{Bild}\,\varphi \text{ linear.}$$

$$\tilde{\varphi} = \overline{\varphi} \circ q$$

## Satz 4.5.8

$\mathbb{K}$ Körper

$V$ Vektorraum über $\mathbb{K}$

$U$ Untervektorraum

$W$ Untervektorraum

$$V = U \oplus W$$

$$q : V \longrightarrow V/U$$

$$\Longrightarrow \boxed{q|_W : W \longrightarrow V/U}$$

ist Iso von VR.

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$U = LH\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V/U$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Basis von } U}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Basis von } \mathbb{R}^3}$$

$$W = LH\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$V/U = LH\left( \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \right)$$

$\dim V < \infty$, $U$ UVR, $W$ Komplement.

Wenn $(c_1, \dots, c_r)$ Basis von $W$ ist

Dann ist $([c_1], \dots, [c_r])$ Basis von $V/U$.

$$\dim (V/U) = \dim W = \dim V - \dim U$$

---

<u>Korollar:</u> $\varphi : V \longrightarrow W$ $\quad V, W$ endl. dim VR.

$$\text{Bild}\, \varphi \cong V/\ker \varphi$$

$$\underbrace{\dim \text{Bild}\, \varphi}_{\text{rg}\, \varphi} = \dim (V/\ker\varphi) = \dim V - \dim \ker \varphi$$

$$\boxed{\text{rg}\, \varphi + \dim \ker \varphi = \dim V}$$

**Kor:** $V$ Vektorraum über $\mathbb{K}$

$U, W \subseteq V$ endl. dim. UVR.

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

**Bew:**

$$\varphi : \begin{pmatrix} U \times W & \longrightarrow & V \\ (u, w) & \longmapsto & u + w \end{pmatrix} \qquad \ker \varphi \cong U \cap W$$

$$\operatorname{rg} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim(U \times W)$$

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W .$$

$\blacksquare$