

Lineare Algebra I für die Fachrichtung Informatik Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra I für die Fachrichtung Informatik Wintersemester 2023/24

Permutationen
&

Alternierende
multilineare Abbildungen

Permutationen

$n \in \mathbb{N}$.
 σ Permutation auf $\{1, \dots, n\}$
 $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bijektiv

$$S(n) := \left(\left\{ \sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \sigma \text{ bijektiv} \right\}, \circ \right)$$

Symmetrische Gruppe

$$|S(n)| = n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!$$

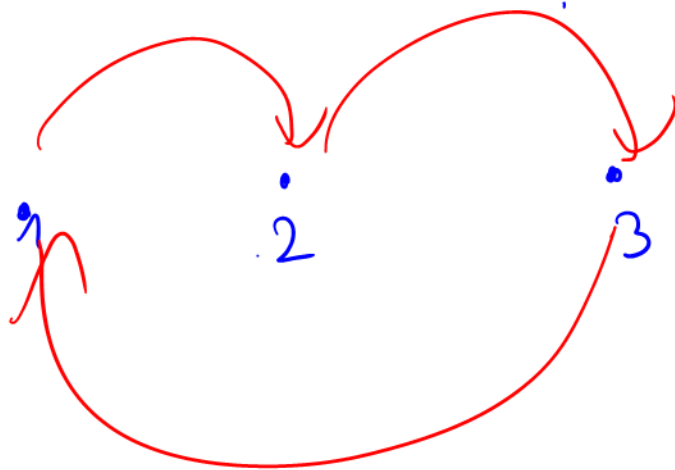
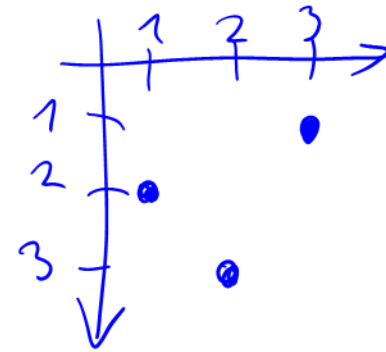
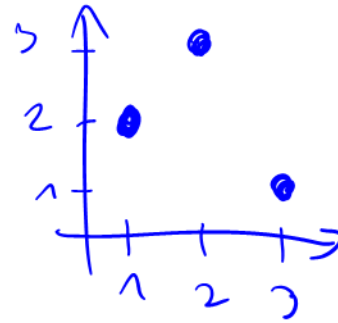
(siehe Bsp. 3.2.3(h)).

z.B. $n=3$

$$G: \left(\begin{array}{l} \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\} \\ 1 \longmapsto 2 \\ 2 \longmapsto 3 \\ 3 \longmapsto 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



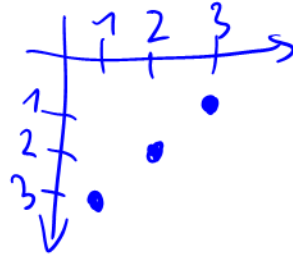
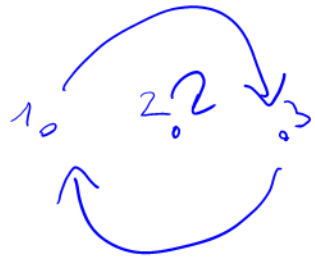
$$(123)$$

Zykel Schreibweise

$$\tau: \left(\begin{array}{l} \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\} \\ 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \end{array} \right)$$

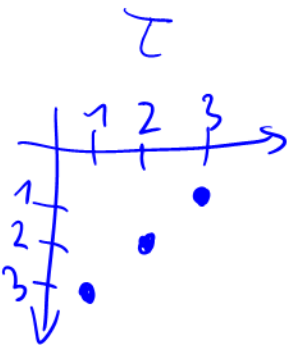
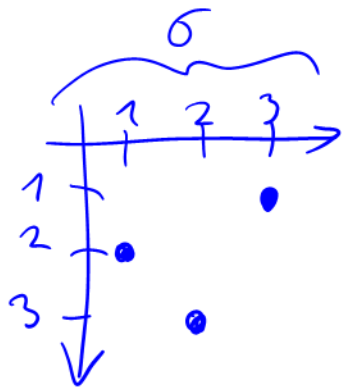
$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

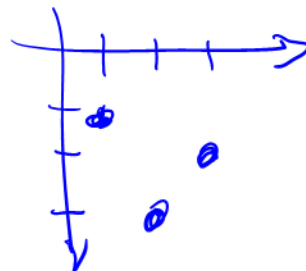


$$(13)$$

$$\sigma \circ \tau: \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 2 \end{array} = (23)$$



=



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Def. 5.11. (Transposition)

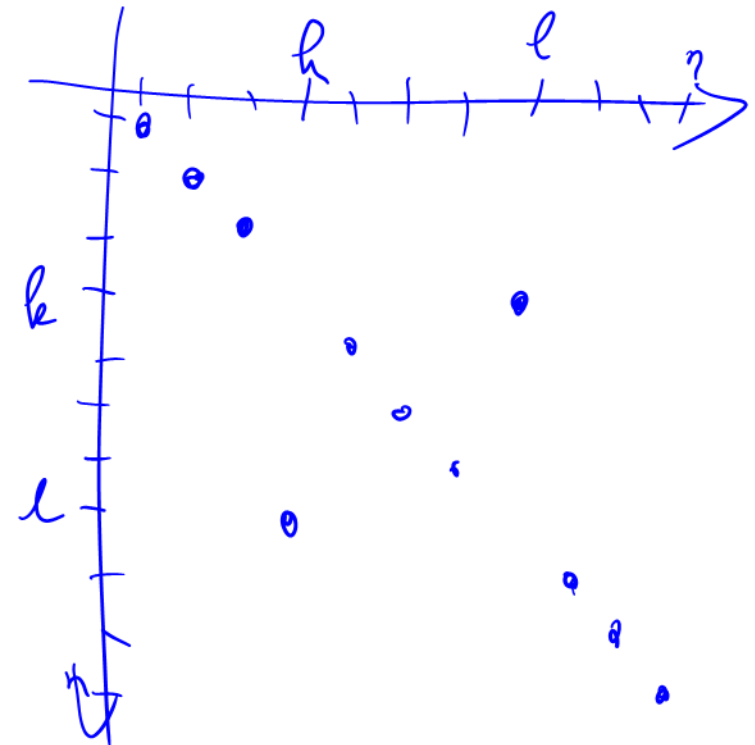
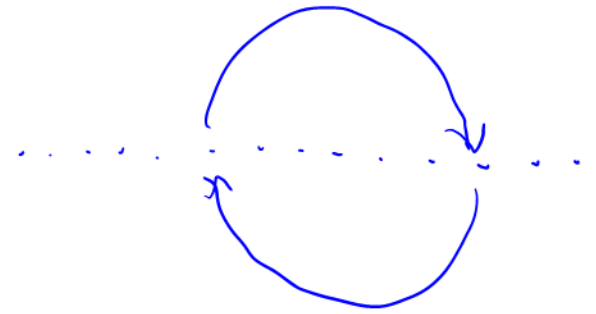
Sei $n \in \mathbb{N}$. $\tau \in \mathcal{P}(n)$.

τ heiße **Transposition**, wenn $\exists k, l \in \{1, \dots, n\} : k \neq l$
(oder **2-Zykel**)

$$\tau: j \mapsto \begin{cases} l & \text{falls } j = k \\ k & \text{falls } j = l \\ j & \text{sonst.} \end{cases}$$

Notation: $\tau = (k \ l) = (l \ k)$

$$\boxed{\tau \circ \tau = \text{id}}$$



Lemma 5.1.2

$$n \in \mathbb{N}, \quad \sigma \in \mathcal{P}(n).$$

DANN $\exists r \in \mathbb{N}_0, \tau_1, \dots, \tau_r$ Transpositionen

$$\sigma = \tau_r \circ \dots \circ \tau_1$$

$$(r=0 : \sigma = \text{id})$$

$$(123) = (12) \circ (23) = (31) \circ (12)$$

1	2	3
2	3	1

ex. i

$$\sigma: \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{array} \in \mathcal{S}(5).$$

$$\tau_1 = (35)$$

$$\tau_1 \circ \sigma = \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}$$

$$\tau_2 = (24)$$

$$\tau_2 \circ \tau_1 \circ \sigma = \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\tau_3 = (12)$$

$$\tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \sigma = \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \sigma = \text{id} \Rightarrow \sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3$$

$$\sigma = (35)(24)(12)$$

Satz 5.18 $n \in \mathbb{N}$. Es gibt genau einen
Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: (\mathcal{S}(n), \circ) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \cdot)$$

$$\forall \tau \text{ Transp: } \varphi(\tau) = -1$$

Dieser eindeutige Homo heißt **Signum** **$\text{sgn} = \varphi$**

$$\text{sgn}(13) = -1$$

Bw der Eindeutigkeit:

$\varphi, \psi: \mathcal{S}(n) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \cdot)$ Gruppenhomo.

$$\forall \tau \text{ Transp: } \varphi(\tau) = \psi(\tau) = -1$$

Sei $\sigma \in \mathcal{S}(n)$.

$$(\text{z.z.: } \varphi(\sigma) = \psi(\sigma))$$

$$G = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_r$$

$$\phi(\sigma) = \phi(\tau_1) \phi(\tau_2) \dots \phi(\tau_r)$$

$$= (-1) \quad (-1) \quad \dots \quad (-1) = (-1)^r$$

$$= \psi(\tau_1) \psi(\tau_2) \dots \psi(\tau_r)$$

$$= \psi(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_r)$$

$$= \psi(\sigma).$$

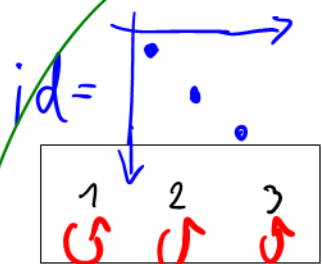
z.B.: $n=5$

$$\sigma = \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{array} = (3\ 5) \circ (2\ 4) \circ (1\ 2)$$

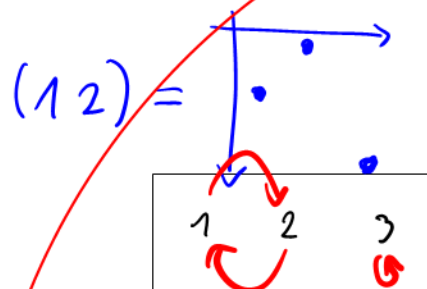
$$\text{sgn}(\sigma) = (-1) (-1) (-1) = (-1)^3 = -1.$$

$S(3)$

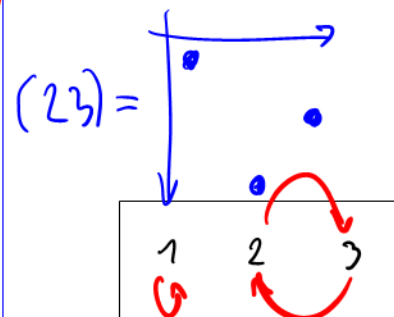
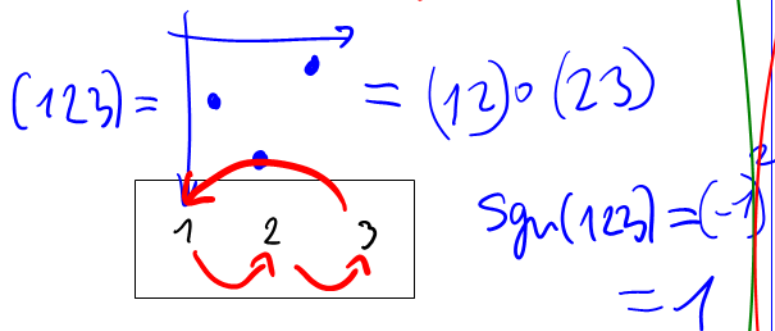
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$



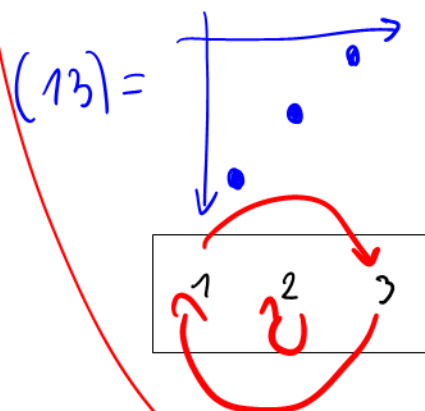
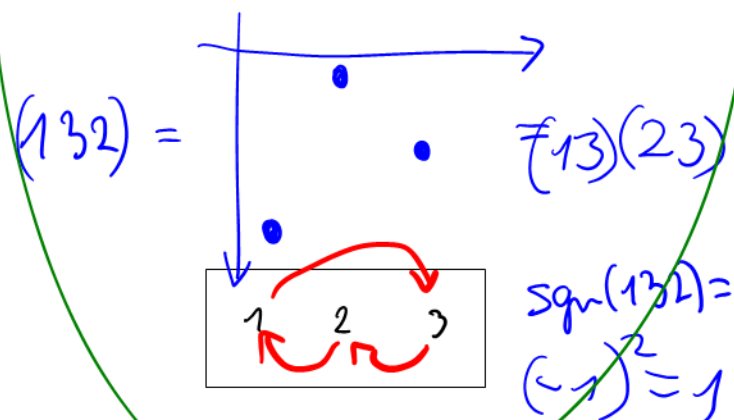
$$\text{sgn}(id) = 1$$



$$\text{sgn}(12) = -1$$



$$\text{sgn}(23) = -1$$



$$\text{sgn}(13) = -1$$

Def 5.1.10: $n \in \mathbb{N}$

$\sigma \in \mathcal{P}(n)$ heißt gerade Permutation, wenn $\text{sgn}(\sigma) = 1$

$\sigma \in \mathcal{P}(n)$ heißt ungerade Permutation, wenn $\text{sgn}(\sigma) = -1$

$\mathcal{A}(n) = \ker(\text{sgn}) = \{ \sigma \in \mathcal{P}(n) \mid \text{sgn}(\sigma) = 1 \}$ Alternierende Gruppe
Untergruppe von $(\mathcal{P}(n), \circ)$

Lemma 5.1.11: $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Es sei $\tau \in \mathcal{P}(n)$ mit $\text{sgn}(\tau) = -1$.

$\mathcal{A}(n) \xrightarrow{\quad} \{ \sigma \in \mathcal{P}(n) \mid \text{sgn}(\sigma) = -1 \}$ ist eine Bijektion.
 $\mathcal{P} \xrightarrow{\quad} \mathcal{P} \circ \tau$

Menge der ungeraden Permutationen

Menge gerade Permutationen

und $|\mathcal{A}(n)| = \frac{n!}{2}$

Bw: $(G, *)$ Gruppe, $a \in G$.

$\begin{pmatrix} G & \longrightarrow & G \\ u & \longmapsto & u * a \end{pmatrix}$ ist eine Bijektion, weil

$\begin{pmatrix} G & \longrightarrow & G \\ v & \longmapsto & v * a^{-1} \end{pmatrix}$ die Umkehrabbildung dazu ist.

$U \subseteq G$ Untergruppe

$$U * a = \{ u * a \mid u \in U \}$$

$\begin{pmatrix} U & \longrightarrow & U * a \\ u & \longmapsto & u * a \end{pmatrix}$ ist Bijektion von U

zu $U * a$.

Anwenden auf $G = S(n)$, $U = A(n)$, $a = \tau$

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(n) & \longrightarrow & \{ \sigma \mid \text{sgn}(\sigma) = -1 \} \\ \rho & \longmapsto & \rho \circ \tau \end{array} \right)$$

hat die Umkehrabbildung

$$\left(\begin{array}{ccc} \{ \sigma \mid \text{sgn}(\sigma) = -1 \} & \longrightarrow & \mathcal{A}(n) \\ \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \tau^{-1} \end{array} \right)$$

Also gilt: $|\mathcal{A}(n)| = |\{ \sigma \mid \text{sgn}(\sigma) = -1 \}|$

$$\text{und } |\mathcal{A}(n)| + |\{ \sigma \mid \text{sgn}(\sigma) = -1 \}| = |\mathcal{S}(n)| = n!$$



$$|A(n)| = \frac{n!}{2}$$

gilt

nicht für $n=1$

Alternierende Abbildungen

K Körper

V, W Vektorräume über K . $n \in \mathbb{N}$.

$$V^n = \underbrace{V \times \dots \times V}_n = \left\{ (v_1, \dots, v_n) \mid \forall j \in \{1, \dots, n\}: v_j \in V \right\}$$

$$(a) : \omega : V^n \longrightarrow W \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

heißt **linear in j -ter Komponente**, wenn

$$\forall v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n \in V:$$

$$\left(\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & W \\ v & \xrightarrow{\quad} & \omega(v_1, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n) \end{array} \right)$$

linear ist.

(b) $\omega : V^n \longrightarrow W$ heißt **multilinear**, falls

ω linear in jeder Komponente ist. (für $n=2$ bilinear)

(c) $\omega : V^n \longrightarrow W$ heißt **alternierend**, falls ω multilinear ist

und $\boxed{(\exists i, j : i \neq j \quad v_i = v_j) \Rightarrow \omega(v_1, \dots, v_n) = 0}$

z.B.:

$$n=1.$$

$$\omega: V \longrightarrow W \quad \text{alternierend} \iff \omega: V \longrightarrow W \quad \text{linear.}$$

$$n=2:$$

$$x: (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3) \quad \text{Kreuzprodukt / Vektorprodukt}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

ist alternierend

$$n=2$$

$$V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = W.$$

$$\omega: V \times V \longrightarrow V$$

$$(f, g) \mapsto f' \cdot g - g' \cdot f$$

ist alternierend

$n=3$

$$\omega: \begin{pmatrix} K \times K \times K & \longrightarrow & K \\ (x, y, z) & \longmapsto & xyz \end{pmatrix}$$

multilinear, aber
NICHT alternierend!

$$\omega(1, 1, 1) = 1 \neq 0.$$

$$\circ: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (f, g) & \longmapsto & f \circ g \end{pmatrix}$$

linear in 1. Komponente,
aber NICHT linear in
2. Komponente!

$$n=2 \quad K=\mathbb{R}$$

$$W=\mathbb{R}$$

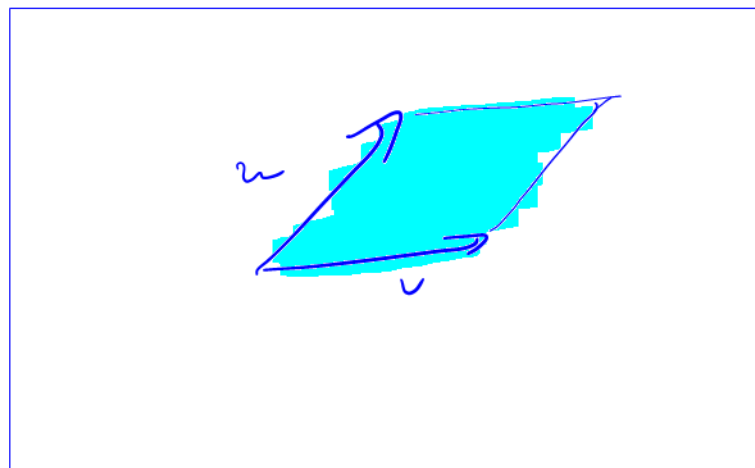
$$V=\mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v, w$$

$$A: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto \text{Flächeninhalt von } \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$



$$A(tv, w) = |t| A(v, w).$$

Orientierter Flächeninhalt:

$$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \text{ pos. orientiert}$$

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \text{ negativ orientiert.}$$

$$\omega: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \begin{cases} A(v, w), & \text{positiv or.} \\ -A(v, w), & \text{negativ or.} \end{cases}$$

ω alternierend, weil $\omega(u,v) = \pm A(u,v) = 0$.

$$A(u,w) = |\omega(u,w)|.$$

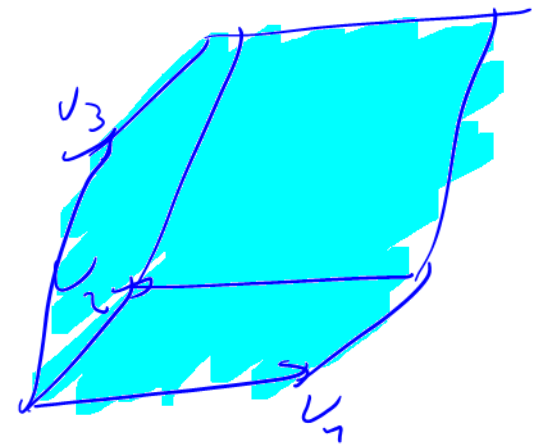
$n=3$:

$$K = \mathbb{R}$$

$$V = \mathbb{R}^3$$

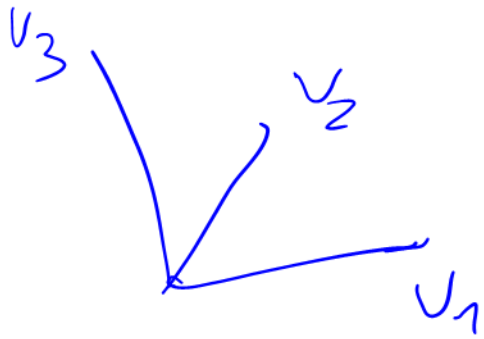
$$W = \mathbb{R}$$

$$\omega: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

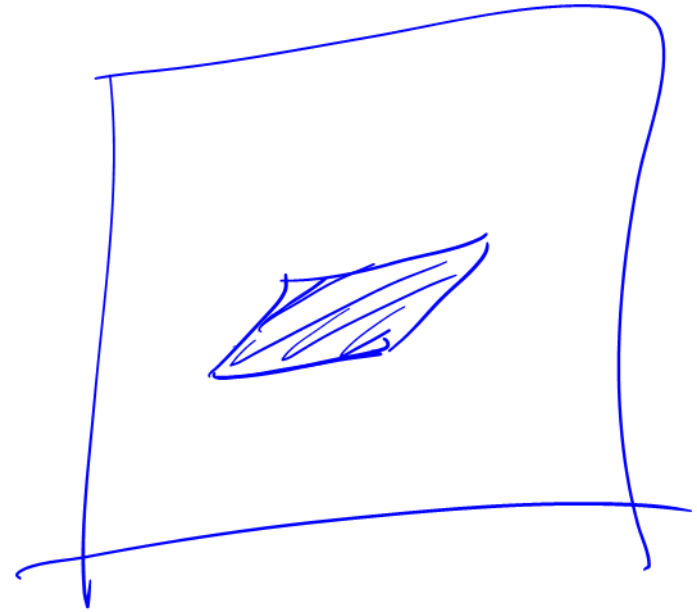


$$(u_1, u_2, u_3) \longmapsto \text{orientiertes Volumen} \\ = \pm \text{Vol}(\text{parallelepiped})$$

$+$, falls (u_1, u_2, u_3) pos. orient., $-$ falls negativ orient.



$$\omega(v_1, v_2, v_3) = 0$$



$$\omega(v_1, v_2, v_3) = \omega(v_1, v_2, v_3 + 4v_2)$$

└─┐ ↑

Lemma 5.2.3 (Rechenregeln für alt. Abbildungen) $\mathbb{K}$ Körper

V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$. $n \in \mathbb{N}$.

$$V^n = \underbrace{V \times \dots \times V}_n = \left\{ (v_1, \dots, v_n) \mid \forall j \in \{1, \dots, n\} : v_j \in V \right\}$$

$\omega: V^n \rightarrow W$ alternierend.

$$(G1) \quad \forall i \neq j \quad \mu \in \mathbb{K}: \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \mu v_i, \dots, v_n) = \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$$

$$(G2) \quad \forall i \neq j: \quad \omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) = (-1) \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$$

$$(G3) \quad \forall i \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}: \omega(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda \omega(v_1, \dots, v_n)$$

Bw: (G3) folgt aus Multilinear (alternierend nicht notw.)

$$(G_1) \quad w(v_1, \dots, \underline{v_j + \mu v_i}, \dots, v_n)$$

$$= w(v_1, \dots, v_j, \dots, v_n)$$

$$+ w(v_1, \dots, \mu v_i, \dots, v_n)$$

$$= \underline{w(v_1, \dots, v_j, \dots, v_n)}$$

$$+ \mu \overbrace{w(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_n)}^{=0}$$

$\uparrow$
 i

$\uparrow$
 j

$$w(a, b + \mu c, c)$$

$$= w(a, b, c)$$

$$+ w(a, \mu c, c)$$

$$= w(a, b, c)$$

$$+ \mu \underbrace{w(a, c, c)}_{=0}$$

$$= w(a, b, c).$$

$$(G2) \quad n=3 \quad w(a, \underbrace{b, c}_{(G1)}, c) = w(a, b+c, \underbrace{c}_{(-1)(G1)})$$

$$= w(a, b+c, c - (b+c)) = w(a, b+c, \underbrace{-b}_{(G1)})$$

$$= \underbrace{w(a, c, -b)}_{(G3)} = (-1) w(a, c, b)$$

Analog für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.



Lemma 5.2.4

K Körper

V, W Vektorräume über K . $n \in \mathbb{N}$.

$\omega: V^n \rightarrow W$ alternierend.

$$(v_1, \dots, v_n) \in V^n. \quad \sigma \in S(n).$$

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \omega(v_1, \dots, v_n)$$

Bw: Wenn $\sigma = \tau$ Transp., dann folgt das aus (G2).

$$\text{Allg: } \sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_r$$

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) \underset{\substack{\uparrow \\ r \text{ mal (G2)}}}{=} (-1)^r \omega(v_1, \dots, v_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sgn}(\sigma)}}{=} \text{sgn}(\sigma) \cdot \omega(v_1, \dots, v_n).$$

Satz 5.2.5 (Transformationsformel für alt. Abbildungen)

K Körper

V, W Vektorräume über K , $n \in \mathbb{N}$

$\omega: V^n \rightarrow W$ alternierend.

$$(u_1, \dots, u_n) \in V^n$$

$$(v_1, \dots, v_n) \in V^n$$

$$\omega(u_1, \dots, u_n) \leftarrow \text{bekannt}$$

$$\omega(v_1, \dots, v_n) \leftarrow \text{gesucht}$$

Falls $v_1, \dots, v_n \in L_{H_K}(u_1, \dots, u_n)$

Dann $\exists \Delta \in K$:

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \Delta \cdot \omega(u_1, \dots, u_n).$$

Satz 5.2.5 (Transformationsformel für alt. Abbildungen)

K Körper

V, W Vektorräume über K , $n \in \mathbb{N}$

$\omega: V^n \rightarrow W$ alternierend.

$$(u_1, \dots, u_n) \in V^n$$

$$(v_1, \dots, v_n) \in V^n$$

$$\omega(u_1, \dots, u_n) \leftarrow \text{bekannt}$$

$$\omega(v_1, \dots, v_n) \leftarrow \text{gesucht}$$

Falls $v_1, \dots, v_n \in L_{HK}(u_1, \dots, u_n)$

Dann $\exists \Delta \in K$:

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \Delta \cdot \omega(u_1, \dots, u_n).$$

Wenn $v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} u_i$ $\alpha_{ij} \in K$

Dann

$$\Delta = \sum_{\sigma \in S(n)} \text{sgn}(\sigma) \cdot \alpha_{\sigma(1),1} \cdot \alpha_{\sigma(2),2} \cdots \alpha_{\sigma(n),n}$$

Determinante

ω
 (α_{ij})

Bw: nächste Vorlesung.

Korollar 5.2.6

V, W Vektorräume über K , $n \in \mathbb{N}$

K Körper

$\omega: V^n \rightarrow W$ alternierend. $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$

$$\omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0$$



$v_1, \dots, v_n$ linear unabh.
und paarw. versch.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

$v_1, \dots, v_n$ linear abh.
oder nicht paarw. versch.



$$\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$$

$A \Rightarrow B$

Bw: $v_1, \dots, v_n$ linear abh. $u_1, \dots, u_r$ Basis von $\text{LH}(v_1, \dots, v_n)$

$$r < n.$$

$$v_1, \dots, v_n \in \text{LH}(\underbrace{u_1, \dots, u_r, 0, \dots, 0}_{n \text{ Vektoren}})$$

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \Delta \omega(u_1, \dots, u_r, 0, \dots, 0) = 0.$$

$\square$