Lineare Algebra I
für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 2023/24

Def 5.3.1 (Determinante) $\mathbb{K}$ Körper

$n \in \mathbb{N}$

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \in \mathbb{K}$$

Leibniz-Formel

z.B.: $n=2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

z.B. $n=4$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

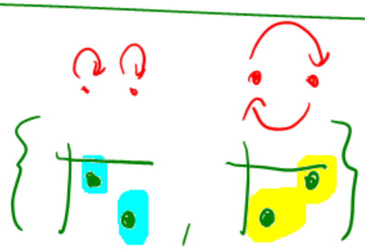
z.B. $n=1$ $\quad S(1) = \{id\}$

$$\det(a_{11}) = a_{11}$$

---

z.B. $n=2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$S(2) = \{$  $\}$

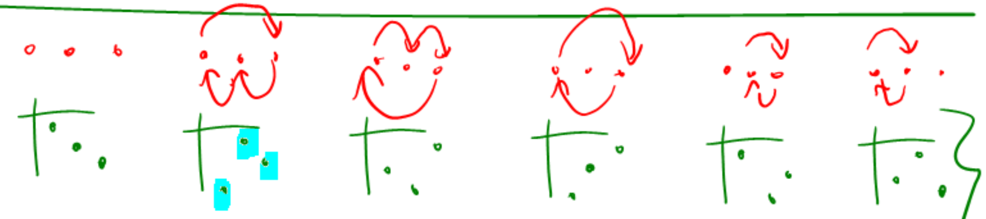
	id	(12)
sgn:	(+1)	(−1)

$$\det A = +a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

---

z.B. $n=3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$S(3) = \{$  $\}$

	id	(132)	(123)	(13)	(23)	(12)
sgn:	+1	+1	+1	−1	−1	−1

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Anmerkung: Sarrus-Regel

gilt NUR für $n=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array}\right)$$

$n=4$

$$|S(4)| = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$\det A$ = Summe von 24 Termen, 12 mit Vorzeichen + 12 mit Vorzeichen −

(für die praktische Rechnung leider völlig ungeeignet ...)

$$\det \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix} =$$

a14 a23 a32 a41 − a13 a24 a32 a41 − a14 a22 a33 a41 + a12 a24 a33 a41 + a13 a22 a34 a41 − a12 a23 a34 a41 − a14 a23 a31 a42 + a13 a24 a31 a42 + a14 a21 a33 a42 − a11 a24 a33 a42 − a13 a21 a34 a42 + a11 a23 a34 a42 + a14 a22 a31 a43 − a12 a24 a31 a43 − a14 a21 a32 a43 + a11 a24 a32 a43 + a12 a21 a34 a43 − a11 a22 a34 a43 − a13 a22 a31 a44 + a12 a23 a31 a44 + a13 a21 a32 a44 − a11 a23 a32 a44 − a12 a21 a33 a44 + a11 a22 a33 a44

Satz 5.2.5 (Transformationsformel für alt. Abbildungen)

$\mathbb{K}$ Körper

V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$

$\omega : V^n \longrightarrow W$ alternierend.

$(u_1, \dots, u_n) \in V^n$

$(v_1, \dots, v_n) \in V^n$

$\omega(u_1, \dots, u_n) \leftarrow$ bekannt

$\omega(v_1, \dots, v_n) \leftarrow$ gesucht

Falls $v_1, \dots, v_n \in LH_{\mathbb{K}}(u_1, \dots, u_n)$

Dann $\boxed{\omega(v_1, \dots, v_n) = \Delta \cdot \omega(u_1, \dots, u_n).}$

Wenn $v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} u_i \qquad \alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann $\boxed{\Delta = \det A = \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \alpha_{\sigma(1),1} \cdot \alpha_{\sigma(2),2} \cdots \alpha_{\sigma(n),n}}$

Bw:

$$\omega(v_1, \dots, v_n) \qquad v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i$$

$$= \omega\left(\sum_{i_1=1}^{n} \alpha_{i_1 1} u_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} \alpha_{i_n n} u_{i_n}\right)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \omega\left(\alpha_{i_1,1} u_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n,n} u_{i_n}\right)$$

$$= \sum_{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}} \omega\left(\alpha_{\sigma(1),1} u_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n),n} u_{\sigma(n)}\right)$$

$$= \sum_{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}} \alpha_{\sigma(1),1}\, \alpha_{\sigma(2),2} \cdots \alpha_{\sigma(n),n}\, \underbrace{\omega\left(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}\right)}_{=0,}$$

wenn $\sigma(k) = \sigma(\ell)$ $k \neq \ell$

$$= \sum_{\sigma \in S(n)} \alpha_{\sigma(1),1}\, \alpha_{\sigma(2),2} \cdots \alpha_{\sigma(n),n}\, \underbrace{\omega\left(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}\right)}_{= \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \omega(u_1, \dots, u_n)}$$

$\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$
injektiv
$\Rightarrow$ bijektiv.

$$= \left(\sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \alpha_{\sigma(1),1}\, \alpha_{\sigma(2),2} \cdots \alpha_{\sigma(n),n} \right) \omega(u_1, \dots, u_n)$$

Prop 5.3.4:

$\mathbb{K}$ Köper

$n \in \mathbb{N}$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\Longrightarrow \det(A^T) = \det A$$

Beweisskizze:

$n = 3$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} a_{22} a_{33} + a_{31} a_{12} a_{23} + a_{21} a_{32} a_{13}$$

$$- a_{31} a_{22} a_{13} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33}$$

Idee:

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \ldots$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} \overbrace{\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})}^{=\operatorname{sgn}(\sigma)} \ldots$$

$$= \det(A^T)$$

Def 5.3.5

$\mathbb{K}$ Körper

$n \in \mathbb{N}$

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

(a) A heiße **obere Dreiecksmatrix**

wenn $\forall i > j : a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(b) A heiße **untere Dreiecksmatrix**

wenn $\forall i < j : a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} * & 0 & & 0 \\ * & * & & 0 \\ & & * & 0 \\ * & & & * \end{pmatrix}$$

(c) A heiße **Diagonalmatrix**

wenn $\forall i \neq j : a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} * & & & 0 \\ & * & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & * \end{pmatrix}$$

Prop 5.3.6

$\mathbb{K}$ Körper

$n \in \mathbb{N}$

$A \; (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

WENN

- A obere Dreiecksmatrix

ODER

- A untere Dreiecksmatrix

ODER

- A Diagonalmatrix,

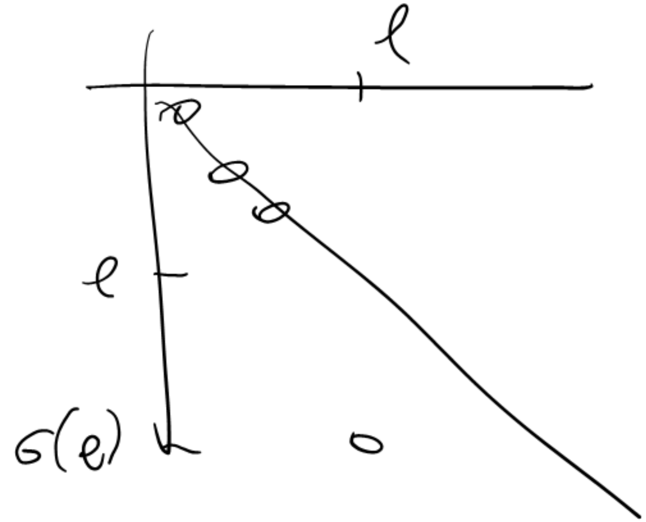
IST, DANN $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

Bw: FALLS A obn Δ-Matrix:

$\sigma \in S(n)$, $\sigma \neq id$.

$\to \exists k: \sigma(k) \neq k$

$\Rightarrow \exists l: \sigma(l) > l$.



$$\text{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots \underbrace{a_{\sigma(l)l}}_{=0} \cdots a_{\sigma(n)n} = 0$$

$$\sum_{\sigma \in S(n)} = \underbrace{\text{sgn}(id)\, a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}} + \cancel{\sum_{\sigma \neq id} \underbrace{\qquad}_{=0}}$$

ACHTUNG:

$$\det(\lambda A) \neq \lambda \det A$$

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$

$$\det : \mathbb{K}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{K}$$

ist NICHT LINEAR!

(für $n \geq 2$)

Satz 5.3.7

$\mathbb{K}$ Körper, $n \in \mathbb{N}$.

(a) $$(\mathbb{K}^n)^n \longrightarrow \mathbb{K} : (v_1, \dots, v_n) \longmapsto \det (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$$

ist alternierende n-lineare Abbildung $(V = \mathbb{K}^n, W = \mathbb{K})$

(b) $$(\mathbb{K}^{1\times n})^n \longrightarrow \mathbb{K} \; (z_1, \dots, z_n) \longmapsto \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

ist alternierende n-lineare Abbildung $V = \mathbb{K}^{1\times n}, W = \mathbb{K}$.

Bw: (b) folgt aus (a) und 5.3.4.

Wie zeigt man (a)?

Sei $k \in \{1, \dots, n\}$.

$$\det\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{array}\right) = \underbrace{\sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \underbrace{a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}}_{\text{linear in der } k\text{-ten Spalte}}}_{\text{linear in der } k\text{-ten Spalte.}}$$

$\Rightarrow$

Also ist $\boxed{\omega : (v_1, \dots, v_n) \longmapsto \det(v_1 | \dots | v_n)}$ multilinear.

Es bleibt zu zeigen: $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$ falls $v_k = v_l$ $k \neq l$.

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Zerlegen wir die Summe in die geraden und die ungeraden Permutationen:

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S(n) \\ \operatorname{sgn} \sigma = 1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} + \sum_{\substack{\sigma \in S(n) \\ \operatorname{sgn} \sigma = -1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Setzen

$\tau := (k, l)$ Transposition, die k und l vertauscht.

Nach 5.1.11 gilt: $\{\sigma \in S(n) \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\} = \{\sigma \circ \tau \mid \sigma \in A(n)$

$$\sum_{\substack{\sigma \in S(n) \\ \operatorname{sgn} \sigma = 1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} + \sum_{\substack{\sigma \in S(n) \\ \operatorname{sgn} \sigma = -1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in A(n)} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma \in A(n)} \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau)}_{\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(\tau)}_{=-1}}\, a_{\sigma\circ\tau(1),1}\, a_{\sigma\circ\tau(2)2} \cdots a_{\sigma\circ\tau(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in A(n)} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in A(n)} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma\circ\tau(1),1}\, a_{\sigma\circ\tau(2)2} \cdots a_{\sigma\circ\tau(n)n}$$

$$= 0.$$

(Details siehe Skript) $\boxed{\checkmark}$

z. B.:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \overset{(G3)}{=} 2 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} 1\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= 2 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(G2)}{=} 2(-1) \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= 2(-1)\cdot 1\cdot 6\cdot(-3) = 36$$

(Achtung: In der Vorlesung stand hier −36...)

Satz 5.3.9 $\quad \mathbb{K}$ Körper

$n \in \mathbb{N}$

$\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Bw:

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & & b_{1n} \\ & & \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$v_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \cdot u_i \, .$$

$$\omega : (\mathbb{K}^n)^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(w_1, \dots, w_n) \longmapsto \det\left(w_1 \middle| \dots \middle| w_n \right)$$

alternierend.

$$\det(AB) = \omega(v_1, \dots, v_n) = \Delta \cdot \omega(u_1, \dots, u_n)$$

$$\Delta = \det B \qquad = \det B \cdot \det A$$

$$= \det A \cdot \det B$$

$\boxed{\text{AK}}$

Satz 5.3.10

$\mathbb{K}$ Körper

$n \in \mathbb{N}$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$\boxed{\boxed{A \text{ invbar}} \iff \boxed{\det A \neq 0}}$

Wenn A invbar,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Bw: „$\Rightarrow$": A invbar

$\exists B$: $AB = \mathbb{1} = BA$.

$$\det(AB) = \det \mathbb{1}$$

$$\det A \det B = 1 \implies \det A \neq 0.$$

$$\det B = \frac{1}{\det A}$$

„$\Leftarrow$": $\omega \left(\begin{array}{l} (K^n)^n \longrightarrow K \\ (v_1, \dots, v_n) \longmapsto \det(v_1 | \dots | v_n) \end{array} \right)$ alternierend.

$$A = (v_1 | \dots | v_n).$$

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \det A \neq 0.$$

$\Longrightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ lin. unabh.

$\Longrightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = n$ $\Longrightarrow$ A invbar.

Korollar 5.3.11

$\mathbb{K}$ Körper

$n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} GL(n,\mathbb{K}) \longrightarrow (\mathbb{K}^\times = \mathbb{K}\setminus\{0\}, \cdot) = GL(1,\mathbb{K}) \\ A \longmapsto \det A \end{pmatrix}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

$\blacksquare$

Def: $SL(n,\mathbb{K}) = \{ A \in GL(n,\mathbb{K}) \mid \det A = 1 \} = \ker(\det)$

spezielle lineare Gruppe

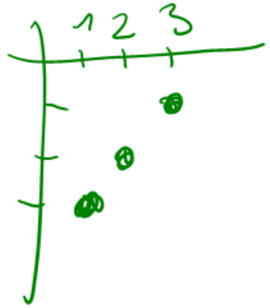
Prop 5.3.13

$n \in \mathbb{N}$

$\sigma \in S(n)$.

$$A_\sigma := \left(e_{\sigma(1)} \,\middle|\, e_{\sigma(2)} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, e_{\sigma(n)} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = \det A_\sigma$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bew:

$$\det A_\sigma = \det\left(e_{\sigma(1)} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, e_{\sigma(n)} \right)$$

$$\overset{5.2.4}{=} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \underbrace{\det(e_1 | \cdots | e_n)}_{=1}$$

$\blacksquare$

Def 5.3.14 Streichungsmatrix

$\mathbb{K}$ Körper

$n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}.$

$(k,l) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}.$

Streichungsmatrix

$St_{(k,l)}(A) =$ Matrix, die man erhält, wenn man bei der Matrix A die k-te Zeile und die l-te Spalte streicht.

$St_{(k,l)}(A) \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$

z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

$$St_{(2,3)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{pmatrix}.$$

Satz 5.3.15

$A \in K^{n\times n}$, $n \geq 2$

$l \in \{1,\dots,n\}$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{k,l} \det\left(St_{(k,l)}(A)\right)$$

Entwicklung nach l-ter Spalte.

$A \in K^{n\times n}$, $n \geq 2$

$k \in \{1,\dots,n\}$

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{k,l} \det\left(St_{(k,l)}(A)\right)$$

Entwicklung nach k-ter Zeile.

z.B.: $l=3$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & - \end{matrix}$$

$\cancel{+\, 0 \det(St_{13}(A))}$

$\cancel{-\, 0 \det St_{23}(A)}$

$+\, 1 \det \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\cancel{-\, 0 \det St_{43}(A)}$

Def 5.3.16 Adjunkte

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad A = (a_{ij})$

$$A^{\#} = (\alpha_{ij})$$

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(St_{(j,i)}(A)\right)$$

---

z.B.: $n=2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{\#} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Satz 5.3.17 Cramer'sche Regel

$$\boxed{A A^{\#} = \det A \cdot \mathbb{1}}$$

Wenn $\det A \neq 0$

Dann $A \frac{1}{\det A} A^{\#} = \mathbb{1}$

$$\frac{1}{\det A} A^{\#} = A^{-1}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\#}}$$