Lineare Algebra I
für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 2023/24

Endomorphismen

$$\begin{tikzcd}
v_0 \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & \varphi(v_0) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & \varphi(\varphi(v_0)) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & & & & & \\
V \arrow[rr, "\varphi"] & & V \arrow[rr, "\varphi"] & & V \arrow[rr] & & V \arrow[rr] & & V \arrow[rr] & & V
\end{tikzcd}$$

$$v_{k+1} = \varphi(v_k)$$

Was ist $v_k = \varphi^k(v_0)$ für große Werte von k ?

Beispiel:

$$V = \mathbb{K}^3$$

I $\quad \varphi : V \to V$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta - \gamma \\ -\alpha + \gamma \\ \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}$$

$$\varphi \circ \varphi(v_0) = \varphi(\varphi(v_0)) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha + \beta - \gamma \\ -\alpha + \gamma \\ \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + \beta - \gamma \\ -\alpha + \gamma \\ \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + \gamma \\ 0 \\ -\alpha + \gamma \end{pmatrix}$$

$$\varphi \circ \varphi \circ \varphi(v_0) = \varphi(\varphi(\varphi(v_0))) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha + \gamma \\ 0 \\ -\alpha + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \xmapsto{\ \varphi\ } \begin{pmatrix} \alpha + \beta - \gamma \\ -\alpha + \gamma \\ \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix} \xmapsto{\ \varphi\ } \begin{pmatrix} -\alpha + \gamma \\ 0 \\ -\alpha + \gamma \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(II) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^3$

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

$$\varphi(X)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} X \qquad A = M_{EE}(\varphi)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$v_0=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

$$\varphi(v_0)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\alpha \\ 0 \\ 7\gamma \end{pmatrix}$$

$$\varphi\circ\varphi(v_0)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\alpha \\ 0 \\ 7\gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^2\alpha \\ 0 \\ 7^2\gamma \end{pmatrix}$$

$$\varphi\circ\varphi\circ\varphi(v_0)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^2\alpha \\ 0 \\ 7^2\gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^3\alpha \\ 0 \\ 7^3\gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\alpha\\ 0\\ 7\gamma\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^2\alpha\\ 0\\ 7^2\gamma\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^3\alpha\\ 0\\ 7^3\gamma\end{pmatrix} \longmapsto \ldots$$

$\forall k \in \mathbb{N}:$

$$\varphi^k\left(\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^k\alpha\\ 0\\ 7^k\gamma\end{pmatrix}$$

$$\varphi^k\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^k\alpha\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\varphi^k\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 7^k\end{pmatrix}$$

(III) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sqrt{3}\gamma \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\beta - \frac{1}{2}\gamma \end{pmatrix}$$

$$\varphi \circ \varphi(v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sqrt{3}\gamma \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\beta - \frac{1}{2}\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\sqrt{3}\gamma \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\beta - \frac{1}{2}\gamma \end{pmatrix}$$

$$\varphi \circ \varphi \circ \varphi(v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\sqrt{3}\gamma \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\beta - \frac{1}{2}\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sqrt{3}\gamma \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\beta - \frac{1}{2}\gamma \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ -\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\sqrt{3}\gamma \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\beta - \frac{1}{2}\gamma \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sqrt{3}\gamma \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\beta - \frac{1}{2}\gamma \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ -\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\sqrt{3}\gamma \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\beta - \frac{1}{2}\gamma \end{pmatrix} \longmapsto \cdots$$

(IV) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$

$\varphi : V \longrightarrow V$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

Systematischer Ansatz:

$\mathbb{K}$ Körper

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & 0 & \\ & & 7 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^k & & \\ & 0 & \\ & & 7^k \end{pmatrix}$$

V Vektorraum über $\mathbb{K}$

$\dim V = n \in \mathbb{N}$.

$\varphi \in \operatorname{End}(V)$ $\quad v_0 \in V$.

Wähle geordnete Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V.

$$A = M_{BB}(\varphi) \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

$$x_0 = (v_0)_B \in \mathbb{K}^n$$

$$(\varphi^k(v_0))_B = (\varphi \circ \dots \circ \varphi(v_0))_B = M_{BB}(\varphi \circ \dots \circ \varphi)(v_0)_B$$

$$= M_{BB}(\varphi) M_{BB}(\varphi) \cdots M_{BB}(\varphi)(v_0)_B = A \cdots A x_0 = A^k x_0.$$

Frage: Wie berechnet man das ?

(V) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$

$\varphi : V \longrightarrow V$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{43}{10} & \frac{27}{10} & \frac{43}{30} \\ 4 & 3 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} x$$

Bezüglich der Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$ erhalten wir die Matrix:

$$M_{EE}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{43}{10} & \frac{27}{10} & \frac{43}{30} \\ 4 & 3 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

Problem: Wie berechnet man Potenzen hiervon?

Betrachte stattdessen die geordnete Basis:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(Man muss zeigen, dass dies wirklich eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist)

$$M_{EB}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{BE}(id) = \left(M_{EB}(id)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Gauß

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{BB}(\varphi) = M_{BE}(id) \; M_{EE}(\varphi) \; M_{EB}(id)$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{43}{10} & \frac{27}{10} & \frac{43}{30} \\ 4 & 3 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\varphi^k(v_0)\right)_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^k X_0 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7^k \end{pmatrix} X_0$$

mit $X_0 = (v_0)_B \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} \frac{43}{10} & \frac{27}{10} & \frac{43}{30} \\ 4 & 3 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}^k = \left(M_{EE}(\varphi)\right)^k = M_{EE}(\varphi^k)$$

Siehe auch Übungsblatt 11 Aufgabe 2

$$= M_{EB}(id)\, M_{BB}(\varphi^k)\, M_{BE}(id)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^k & & \\ & 0 & \\ & & 7^k \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}} = \ldots$$

Im Skript finden sich
andere, aber sehr ähnliche
Beispiele (siehe 5.5.1)
wie unsere Beispiele
I, II, III, IV, V.

Anmerkung: Smith Normalform hilft uns hier leider nicht weiter...

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

$\exists\ B_v$ geordn. Basis von V

$\exists\ B_w$ geordn. Basis von V

$$M_{B_w B_v}(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{M_{B_v B_v}(\varphi \circ \varphi) = M_{B_w B_v}(\varphi) \cdot M_{B_w B_v}(\varphi)}$$

$$M_{B_w B_v}(\varphi^k) = \left(M_{B_w B_v}(\varphi)\right)^k$$

funktioniert nur, wenn $B_v = B_w$. !

Def 5.5.4 $\quad\quad\quad\quad$ $\mathbb{K}$ Körper

$n \in \mathbb{N}$

$A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

A und B heißen ähnlich, wenn

$\exists\, S \in GL(n, \mathbb{K})$

$$S^{-1} A S = B$$

$$A = S B S^{-1}$$

z.B.

$$\begin{pmatrix} \frac{43}{10} & \frac{27}{10} & \frac{43}{30} \\ 4 & 3 & 4/3 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \text{ ist ähnlich zu } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Zwei Fragestellungen (für den Rest des Semesters):

Gegeben: $A \in K^{n \times n}$

Finde $B \in K^{n \times n}$

ähnlich zu A

mit B „möglichst einfach",

z.B. so, dass man

B^k leicht berechnen

kann für große $k \in \mathbb{N}$

Gegeben $A, B \in K^{n \times n}$

Sind A und B

ähnlich?

K Köper

Def 5.5.5

$n \in \mathbb{N}$

$$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Spur}(A) = \operatorname{tr} A = a_{11} + \dots + a_{nn}$$

Lemma 5.5.6

(a) $\operatorname{tr} : K^{n \times n} \longrightarrow K$ ist linear

(b) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

Bw: (a): direktes Nachrechnen

(b) (siehe Aufgabe 2, Übungsblatt 2)

Prop 5.5.7

K Köper

$n \in \mathbb{N}$

$A, B \in K^{n \times n}$.

WENN A ähnlich zu B ist,

DANN (a) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

(b) $\det(A) = \det(B)$

(c) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

Bw:

$$A = SBS^{-1}$$

(a) $rg(A) = rg(SBS^{-1}) = rg(BS^{-1}) = rg(B)$.

(b) $\det A = \det(SBS^{-1}) = \det S \cdot \det B \cdot \det S^{-1}$

$$= \underbrace{\det S \; \det S^{-1}}_{=1} \; \det B .$$

(c) $tr(A) = tr((SB)S^{-1}) = tr(S^{-1}(SB)) = tr(\underbrace{S^{-1}S}_{1} B) = tr(B)$

Achtung: $tr(AB) \neq tr(A)\, tr(B)$

$tr(ABC) \neq tr(BAC)$

Def 5.5.9

$\mathbb{K}$ Körper

V endlichdim Vektorraum über $\mathbb{K}$

$\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$

$\det(\varphi) := \det\left(M_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}}(\varphi)\right)$ für eine geordn. Basis $\mathcal{B}$

$\mathrm{tr}(\varphi) := \mathrm{tr}\left(M_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}}(\varphi)\right)$ für eine geordn. Basis $\mathcal{B}$

Dies ist wohldefiniert

wegen Prop. 5.5.7

z.B. V $\mathbb{R}$-Vektorraum

$\varphi : V \longrightarrow V$ Endomorphismus, $v_0 \in V$

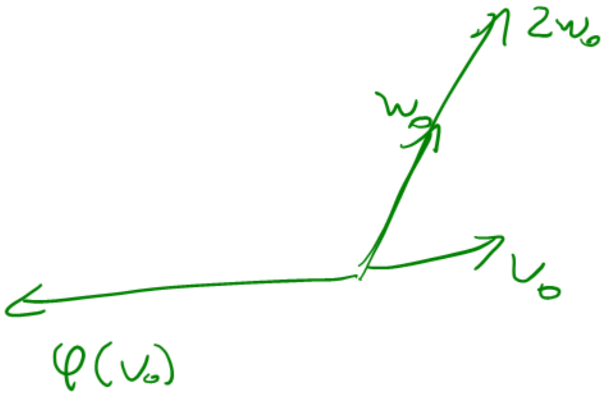
mit $\varphi(v_0) = (-3)v_0$.

$$\varphi(\varphi(v_0)) = \varphi((-3)v_0) = (-3)\varphi(v_0) = (-3)(-3)v_0 = 9v_0$$

$$\varphi^k(v_0) = (-3)^k v_0.$$

$\varphi(w_0) = 2w_0$.

$\varphi^k(w_0) = 2^k w_0$



$$\varphi^k(v_0 + w_0) = \varphi^k(v_0) + \varphi^k(w_0) = (-3)^k v_0 + 2^k w_0.$$

(Wichtige)

Definition:

$\mathbb{K}$ Körper

V Vektorraum über $\mathbb{K}$; $\varphi \in End(V)$.

(a) Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$
heißt Eigenvektor (EV) von φ, wenn
$\exists \lambda \in \mathbb{K}$: $\boxed{\varphi(v) = \lambda v}$

(b) Ein $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert (EW) von φ, wenn
$\exists v \neq 0$: $\boxed{\varphi(v) = \lambda v}$

Für $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

Eigenvektoren von A sind Eigenvektoren von $\begin{pmatrix} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto Ax \end{pmatrix}$

Eigenwerte von A sind Eigenwerte von $\begin{pmatrix} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto Ax \end{pmatrix}$

$v \in \mathbb{K}^n$ ist also EV von A, wenn

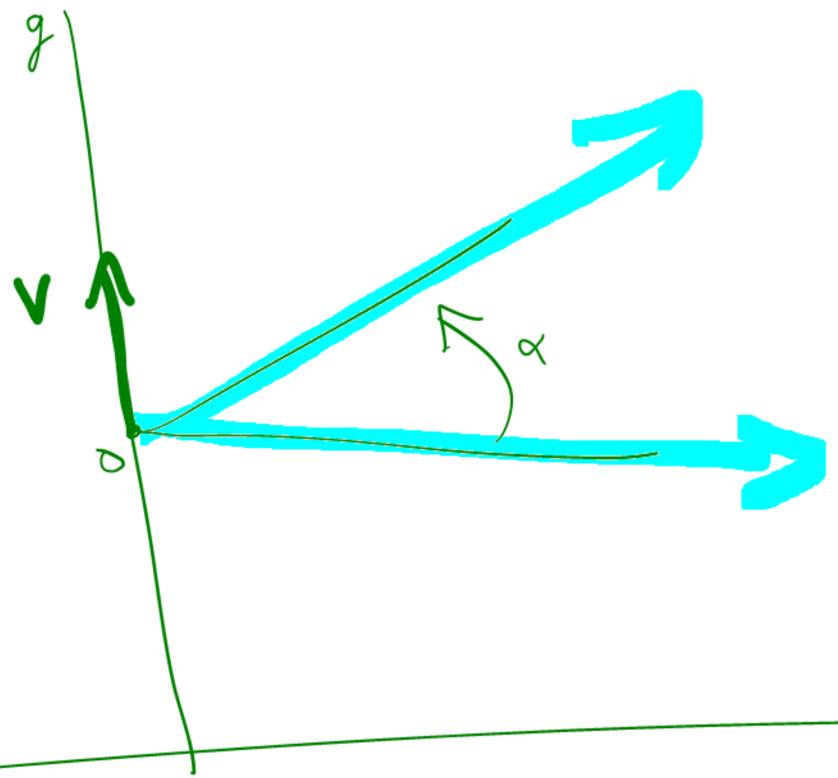
$v \neq 0$ und $\exists \lambda \in \mathbb{K}: \; Av = \lambda v$

$\lambda \in \mathbb{K}$ ist also EW von A, wenn

$\exists\, v \neq 0 : \; Av = \lambda v$

Z.B.: $\quad V = \mathbb{R}^3 \quad \alpha \in]0, \pi[. \quad K = \mathbb{R}$

φ = Drehung um g



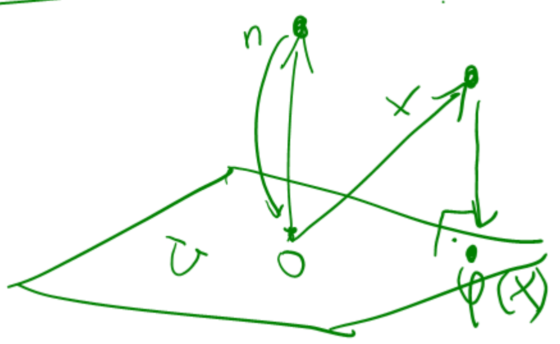
$g = LH(v)$

$\varphi(v) = v = 1v$

Also ist v ein EV

$\lambda = 1$ ist EW.

U 2-dim UVR von $\mathbb{R}^3$



φ = Projektion auf U

$\forall u \in U \setminus \{0\}: \quad \varphi(u) = u = 1u \qquad \lambda = 1$ EW

$\varphi(n) = 0 = 0n \quad \lambda = 0$ ist EW, n EV.

Lemma 5.6.2

$B = SAS^{-1}$

A ähnlich zu B

$$\Rightarrow \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ ist EW von } A\} = \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ ist EW von } B\}$$

<u>Bw:</u> „$\subseteq$": λ EW von A z.z: λ EW von B.

$\exists v \neq 0$

$Av = \lambda v$

$SAv = S\lambda v$

$SA\mathbb{1}v = \lambda Sv$

$SAS^{-1}Sv = \lambda Sv$

$B(Sv) = \lambda Sv.$

$\Rightarrow$ λ ist EW von B zum EV Sv.

Prop 5.6.3 $\qquad$ $\mathbb{K}$ Körper

V $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$

mit geordn. Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$.

$\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

Dann sind äquivalent:

(i) $\boxed{M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ ist Diagonalmatrix}}$

(ii) $\boxed{\text{Alle } b_j \text{ sind EV von } \varphi}$

Wenn beide Aussagen wahr sind, dann sind die $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ genau die EW zu den EV $b_1, \dots, b_n$ in genau dieser Reihenfolge.

<u>Bw:</u> (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

$$M_{BB}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}$: In der j-ten Spalte steht $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\Longleftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}: \quad (\varphi(b_j))_B = \lambda_j e_j = \lambda (b_j)_B$$

$$\Longleftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}: \quad \varphi(b_j) = \lambda_j b_j$$

$\Longleftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}$: b_j ist EV zum EW λ_j

Def: $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ $\quad$ $\dim V = n$

heiße ==diagonalisierbar==

wenn es eine geordn. Basis gibt,

sodass (i) und (ii) gelten.

La 5.6.5 $\mathbb{K}$ Körper

V Vektorraum über $\mathbb{K}$.

$\varphi \in End(V)$.

Zu jedem EV $v \in V$

gibt es genau einen EW.

Diesen berechnet man direkt durch

Einsetzen von v in φ.

$$\varphi(v) = \lambda_1 v \quad | \cdot (-1)$$

$$\varphi(v) = \lambda_2 v$$

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) v \overset{v \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

$\blacksquare$

Prop 5.6.6

$\mathbb{K}$ Körper

V Vektorraum über $\mathbb{K}$.

$\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

Gegeben $\lambda \in \mathbb{K}$ EW von φ.

Dann ist

$$E_\lambda(\varphi) = \{ v \in V \mid v \text{ ist EV zum EW } \lambda \} \cup \{0\}$$
$$= \{ v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v \} = \{ v \in V \mid \varphi(v) - \lambda\, \mathrm{id}(v) = 0 \}$$
$$= \{ v \in V \mid (\varphi - \lambda \mathrm{id})(v) = 0 \} = \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id})$$

ein UVR von V. Eigenraum von φ zum EW λ.

Def: die geometrische Vielfachheit von λ ist $\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda(\varphi))$

Frage 1: Gegeben $v \in V$ EV.

Wie finde ich den dazugehörigen EW?

Antwort: La 5.6.5

Frage 2: Gegeben $\lambda \in \mathbb{K}$ EW

Wie finde alle dazugehörigen EV?

Antwort: 5.6.6

Frage 3: Gegeben gar nichts.

Wie finde ich alle EW?

$\mathbb{K}$ Köper

V Vektorraum über $\mathbb{K}$.

$\varphi \in \mathrm{End}(V)$. $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ist λ ein EW von φ?

$\mathbb{K}$ Köper

V Vektorraum über $\mathbb{K}$.

$\varphi \in \mathrm{End}(V)$. $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ ist EW von $\varphi \iff \exists v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v$

$\iff \exists v \neq 0 : \varphi(v) - \lambda v = 0$

$\iff \exists v \neq 0 : \varphi(v) - \lambda\, id(v) = 0$

$\iff \exists v \neq 0 : (\varphi - \lambda\, id)(v) = 0$

$\iff \ker(\varphi - \lambda\, id) \neq \{0\}$

$\iff$ $\lambda\, id - \varphi$ nicht injektiv

$\mathbb{K}$ Körper

V Vektorraum über $\mathbb{K}$.

$\varphi \in \mathrm{End}(V)$. $\quad \lambda \in \mathbb{K}$.

$\dim V = n < \infty$

λ ist EW von $\varphi \iff \exists v \neq 0 : \ \varphi(v) = \lambda v$

$\iff \exists v \neq 0 : \ \varphi(v) - \lambda v = 0$

$\iff \exists v \neq 0 : \ \varphi(v) - \lambda \, id(v) = 0$

$\iff \exists v \neq 0 : \ (\varphi - \lambda \, id)(v) = 0$

$\iff \ker(\varphi - \lambda \, id) \neq \{0\}$

$\iff \ker(\lambda \, id - \varphi) \neq \{0\}$

$\iff \lambda \, id - \varphi$ ist nicht bijektiv

$\iff \det(\lambda \, id - \varphi) = 0$

Def: 5.6.7 $\quad \mathbb{K}$ Körper

$n \in \mathbb{N}$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Das charakteristische Polynom von A

ist definiert als

$$p_A(X) = \det\left(X \mathbb{1}_n - A\right) \in \mathbb{K}[X].$$

V Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $\dim V = n$,

$\varphi \in \operatorname{End}(V)$.

$p_\varphi(X) := p_A(X)$ für $A = M_{BB}(\varphi)$

B irgendeine geordnete Basis von V.

$\mathbb{K}$ Körper

V Vektorraum über $\mathbb{K}$.

$$\dim V = n < \infty$$

$\varphi \in \mathrm{End}(V)$. $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ ist EW von } \varphi &\iff \exists v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v \\
&\iff \exists v \neq 0 : \varphi(v) - \lambda v = 0 \\
&\iff \exists v \neq 0 : \varphi(v) - \lambda\, id(v) = 0 \\
&\iff \exists v \neq 0 : (\varphi - \lambda\, id)(v) = 0 \\
&\iff \ker(\varphi - \lambda\, id) \neq \{0\} \\
&\iff \ker(\lambda\, id - \varphi) \neq \{0\} \\
&\iff \lambda\, id - \varphi \text{ ist nicht bijektiv} \\
&\iff \det(\lambda\, id - \varphi) = 0 \\
&\iff P_\varphi(\lambda) = 0
\end{aligned}$$

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. $\varphi = \varphi_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$x \longmapsto Ax$$

Was sind die EW von A?

$$\det(X\mathbb{1} - A) = \det\begin{pmatrix} X-3 & 2 \\ -4 & X+3 \end{pmatrix} = (X-3)(X+3) + 8$$

$$= X^2 - 9 + 8 = X^2 - 1$$

$$= (X-1)(X+1)$$

Nullstellen von p_A in $\mathbb{R}$ sind $\{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1\}$

Menge der EW von A ist $\{1, -1\}$.

Was ist der Eigenraum von $\lambda_1 = 1$?

$$E_1(A) = \ker(1\mathbb{1} - A) = \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\right) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Gauß}}{=} LH\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist also ein EV zum EW $\lambda = 1$

Was ist der Eigenraum von $\lambda_2 = -1$?

$$E_{-1}(A) = \ker(-1\mathbb{1} - A) = \ker\left(-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\right) = \ker\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Gauß}}{=} LH\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist also EV zum EW $\lambda = -1$

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_A : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ x &\longmapsto Ax\end{aligned}}$$

ALSO: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

ist diagonalisierbar und

für $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ gilt:

$$M_{BB}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$S = M_{EB}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $S^{-1} = M_{BE}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = A = M_{EE}(\varphi_A) = M_{EB}(id)\, M_{BB}(\varphi_A)\, M_{BE}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ ist ähnlich zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.