

Lineare Algebra I

für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2023/24

Diagonalisierbarkeit

$$\varphi \in \text{End}(V)$$

$$\dim V = n < \infty.$$

$$A = M_{BB}(\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & 0 & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

V Vektorraum über $\mathbb{K}$

$$\dim V = n$$

$$\varphi \in \text{End}(V)$$

φ ist diagonalisierbar



$$\exists B = (b_1, \dots, b_n)$$

geordnete Basis von V

$$M_{BB}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$



$\exists B = (b_1, \dots, b_n)$ geordnete Basis von V
Jedes b_j ist EV von φ

$\mathbb{K}$ Körper

$$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

A ist diagonalisierbar



$$\exists S \in GL(n, \mathbb{K})$$

$$\tilde{A} = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$



$$\exists S = (b_1 | \dots | b_n) \in GL(n, \mathbb{K})$$

Jedes b_j ist EV von A

Für $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\varphi \in \text{End}(V)$$

V VR über $\mathbb{K}$

$$E_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$

$$= \ker(\lambda \text{id} - \varphi)$$

$$= \ker(\varphi - \lambda \text{id})$$

Eigenraum von φ zu λ

λ ist EW von φ

$$\Leftrightarrow \underbrace{\dim E_\lambda(\varphi)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Geometrische Vielfachheit von } \lambda}} > 0$$

Geometrische Vielfachheit von λ

$$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

$$E_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}$$

$$= \ker(\lambda \mathbb{1} - A)$$

$$= \ker(A - \lambda \mathbb{1})$$

Eigenraum von A zu λ

λ ist EW von A

$$\Leftrightarrow \underbrace{\dim E_\lambda(A)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Geometrische Vielfachheit von } \lambda}} > 0$$

Geometrische Vielfachheit von λ

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ EW von φ

$$W := E_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + E_{\lambda_k}(\varphi) = \left\{ v_1 + \dots + v_k \mid \forall j \ v_j \in E_{\lambda_j}(\varphi) \right\}.$$

• Ist immer $W = V$? **Nein**

• Ist die Summe immer direkt? **Ja.**

Satz 5.6.14

K Körper

V Vektorraum über K

$$\varphi \in \text{End}(V)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ paarw. verschiedene EW von φ

Dann ist die Summe

$$W := E_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + E_{\lambda_k}(\varphi)$$

direkt $\left(W = E_{\lambda_1}(\varphi) \oplus E_{\lambda_2}(\varphi) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}(\varphi) \right)$, d.h.

$$\Psi: \left(\begin{array}{c} E_{\lambda_1}(\varphi) \times \dots \times E_{\lambda_k}(\varphi) \\ (v_1, \dots, v_k) \end{array} \right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{c} W \\ v_1 + \dots + v_k \end{array} \right) \text{ ist bijektiv.}$$

ACHTUNG: $W \neq V$ im Allgemeinen

Bw: $(v_1, \dots, v_k) \in \ker \Psi$. z.z: $v_1 = 0 = v_2 = 0 = \dots = v_k = 0$.

$$v_1 + \dots + v_k = 0$$

$$\varphi(v_j) = \lambda_j v_j$$

λ_j paarw.
verschieden.

Per Induktion nach $k \in \mathbb{N}$.

$k=1$: $v_1 = 0$ z.z: $v_1 = 0$ ✓

Annahme: Aussage gilt für $k \in \mathbb{N}$. (z.z: Aussage gilt für $k+1$.)

① $v_1 + v_2 + \dots + v_k + v_{k+1} = 0$ (z.z: $\forall j \ v_j = 0$)

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k + v_{k+1} = 0 \quad | \varphi$$

$$\varphi(v_1 + v_2 + \dots + v_k + v_{k+1}) = \varphi(0)$$

$$\varphi(v_1) + \varphi(v_2) + \dots + \varphi(v_k) + \varphi(v_{k+1}) = 0$$

② $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$

Addieren $(-\lambda_{k+1})$ -fache von ① auf ②:

$$-\lambda_{k+1}v_1 + \lambda_1 v_1 + (-\lambda_{k+1})v_2 + \lambda_2 v_2 + \dots + (-\lambda_{k+1})v_k + \lambda_k v_k - \cancel{\lambda_{k+1}v_{k+1} + \lambda_{k+1}v_{k+1}} = 0$$

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1}_{\in E_{\lambda_1}(\varphi)} + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_{k+1})v_2}_{\in E_{\lambda_2}(\varphi)} + \dots + \underbrace{(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k}_{\in E_{\lambda_k}(\varphi)} = 0$$

Induktions-
vor.
 $\Rightarrow \forall j=1, \dots, k: \underbrace{(\lambda_j - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} v_j = 0.$

$$\Rightarrow \forall j=1, \dots, k: v_j = 0.$$

① $\underbrace{v_1 + v_2 + \dots + v_k + v_{k+1}}_{=0} = 0 \Rightarrow v_{k+1} = 0$



Korollar 5.6.15

K Körper

V Vektorraum über K

$\varphi \in \text{End}(V)$

Eigenvektoren zu verschiedenen EW
sind linear unabhängig!

Bw: $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in W$ paarw. versch.

$v_1, \dots, v_k \in V$ zu $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k}_{\in E_{\lambda_1}(\varphi)} = 0$$

$$(z.z.: \forall j \alpha_j = 0)$$

$$\xRightarrow{5.6.14} \forall j \alpha_j v_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$$



Satz 5.6.13

K Körper

V Vektorraum über K

$\varphi \in \text{End}(V)$

Wenn $\dim V = n \in \mathbb{N}$,

dann hat φ höchstens n verschiedene EW.

Bw: $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarw. versch. EW.

5.6.15 $\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ linear unabh.

$$\Rightarrow k \leq n.$$

Korollar 5.6.16

Hinreichendes Kriterium für Diagonalisierbarkeit

K Körper

V Vektorraum über K mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$.

WENN

$\varphi \in \text{End}(V)$ hat n verschiedene EW in K

DANN

φ ist diagonalisierbar

Bw: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ versch. EV.

$$\exists v_1, \dots, v_n : \forall j \quad v_j \neq 0 \quad \varphi(v_j) = \lambda_j v_j.$$

$$5.6.15 \Rightarrow (v_1, \dots, v_n) \text{ linear unabh.}$$

$$\dim V = n. \quad \Rightarrow (v_1, \dots, v_n) \text{ Basis von } V.$$



Satz 5.6.18

K Körper

V Vektorraum über K mit $\dim V = n$

$\varphi \in \text{End}(V)$

Dann sind äquivalent:

(i) φ ist diagbar

(ii) V ist die Summe der Eigenräume, d.h.
jedes $v \in V$ ist endliche Summe von EV

(iii) V ist die direkte Summe der Eigenräume
$$V = \bigoplus_{j=1}^h E_{\lambda_j}(\varphi)$$

(iv) Die Summe der geometrischen Vielfachheiten ist n

Bw: Weil $\dim V = n$ endlich ist, gibt es nur (5.6.13)
endlich viele verschiedene EW in $\mathbb{K}$:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$$

$$W := E_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + E_{\lambda_k}(\varphi)$$

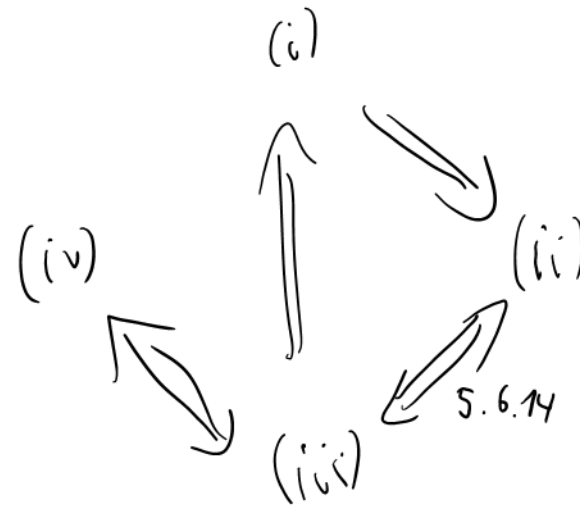
$$\stackrel{5.6.14}{=} E_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}(\varphi)$$

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

φ diagonalisierbar

$$\Rightarrow \exists \text{ Basis von } V \text{ aus EV von } \varphi \rightarrow (ii)$$

$$(ii') \Rightarrow (i) \quad V = \bigoplus_{j=1}^k E_{\lambda_j}(\varphi)$$



Wähle von $E_{\lambda_j}(V)$ eine Basis an

$$(v_{j,1}, \dots, v_{j,r_j})$$

Klebe diese Basen zusammen:

$$(v_{1,1}, \dots, v_{1,r_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,r_2}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,r_k})$$

Basis von V aus EV von φ

(iii) $\Rightarrow$ (iv):

$$n = \dim V = \dim \bigoplus V_j = \sum \underbrace{\dim V_j}_{\text{geom. Vielfachheit}}.$$

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

$$W = \bigoplus_{j=1}^h E_{\lambda_j}(\varphi) \subseteq V \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

$$\dim W = \underbrace{\sum_{j=1}^h \dim E_{\lambda_j}(\varphi)}_n$$

$$\dim V = n.$$

$$\Rightarrow W = V.$$

Erinnerung: Charakteristisches Polynom

$$p_A(X) := \det(X \mathbb{1} - A) = \det((-1)(A - X \mathbb{1}))$$

$$= \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & & X - a_{nn} \end{pmatrix} \in K[X]$$

$$= (-1)^n \det \begin{pmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} - X \end{pmatrix}$$

$$\det(\mu A) = \mu^n \det A$$

$$\det(\mu a_1 \mid \dots \mid \mu a_n) = \mu^n \det A$$

$$A \in K^{n \times n}$$

Lemma 5.6.12

K Körper

$$A \in K^{n \times n} ; n \in \mathbb{N}$$

P_A hat Grad n
und Leitkoeffizient 1, d.h.

$$P_A = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + c_0$$

mit $c_j \in K$.

Bw:

$$P_A = \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & & X - a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{= (X - a_{11}) \cdots (X - a_{nn})}^{\text{Grad } n \text{ und Leitkoeff} = 1}$$

$$\text{id} : \begin{array}{c} \top \\ \circ \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{array}$$

$$+ \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{I}(n) \\ \sigma \neq \text{id}}} \text{sgn}(\sigma) \underbrace{\cdots}_{\deg(\) < n}$$



Satz 5.6.13 (nochmal)

K Körper

V Vektorraum über K

$\varphi \in \text{End}(V)$

Wenn $\dim V = n \in \mathbb{N}$,

dann hat φ höchstens n verschiedene Ew.

Bw:

Prop 5.6.11 $\Rightarrow$ Ew sind die NST von p_φ

Lemma 5.6.12 $\Rightarrow \deg p_\varphi = n$

Satz 5.4.14 $\Rightarrow p_\varphi$ hat höchstens $\deg p_\varphi$ versch. NST.



z.B.:

$K = \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ & 5 & 2 \\ & & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

$$p_A = (x - \frac{1}{2})(x - 5)(x - \sqrt{\pi})$$

EW: $\frac{1}{2}, 5, \sqrt{\pi}$. $\xrightarrow{\text{3 versch. EW}} A$ diagonal.

$$B = \begin{pmatrix} 23 & & \\ 1 & 23 & \\ & & 42 \end{pmatrix}$$

$$p_B = (x - 23)(x - 23)(x - 42)$$

EW: 23, 42.

$$\dim E_{23}(B) = 1$$

$$\dim E_{42}(B) = 1$$

B nicht diagonal.

$$C = \begin{pmatrix} 23 & & \\ & 23 & \\ & 1 & 42 \end{pmatrix}$$

$$p_C = (x - 23)(x - 23)(x - 42)$$

EW: 23, 42.

$$\dim E_{23}(C) = 2$$

$$\dim E_{42}(C) = 1$$

C diagonal.

$$(x-1)^3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ 1 & 42 & \end{pmatrix}$$

z.B.: $\varphi = \text{Rotation um } x_3\text{-Achse}$
um den Winkel

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

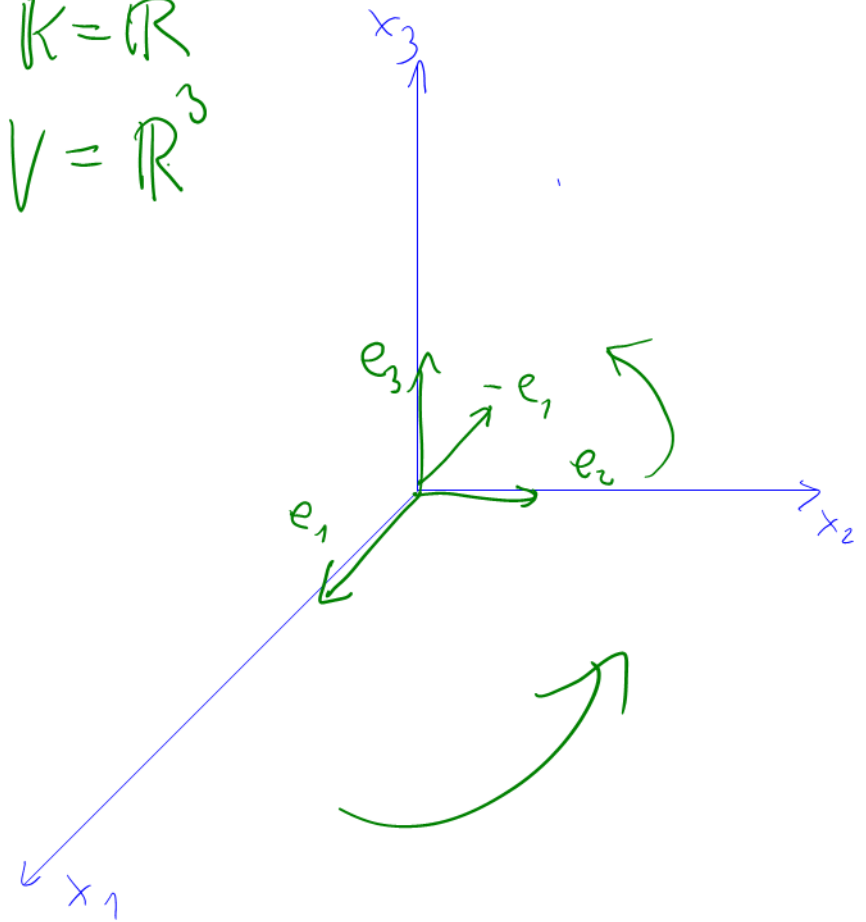
$$A = M_{EE}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_\varphi = P_A = \det \begin{pmatrix} X & 1 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$= +0 - 0 + (X-1) \det \begin{pmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{pmatrix}$$

$$= (X-1)(X^2 + 1).$$

$$K = \mathbb{R}$$
$$V = \mathbb{R}^3$$



$$\varphi(e_1) = e_2$$

$$\varphi(e_2) = -e_1$$

$$\varphi(e_3) = e_3$$

$$X-1 \rightsquigarrow \lambda_1 = 1 \quad \text{EW.}$$

X^2+1 hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

$$E_{\lambda_1}(\varphi) = \ker \left(1 \cdot \mathbb{1} - A \right)$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim E_{\lambda_1}(\varphi) = 1,$$

☐ NICHT diagbar über $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \subseteq \mathbb{C}^{3 \times 3}$$

$$p_A = (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x-i)(x+i)$$

über $\mathbb{C}$ haben 3 versch. Ew.

Also ist A diagbar über $\mathbb{C}$.

Def 5.6.20

K Körper, $p \in K[X]$, $p \neq 0$

p zerfällt in Linearfaktoren über K , wenn

$\exists \alpha \in K \setminus \{0\}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarw. versch. aus K , $k \in \mathbb{N}_0$, $r_k \in \mathbb{N}$:

$$p = \alpha (X - \lambda_1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k}$$

Prop 5.6.21

K Körper

V Vektorraum über K mit $\dim V = n$

$\varphi \in \text{End}(V)$

WENN

φ diagonalisierbar ist,

DANN

zerfällt P_φ über K in Linearfaktoren.

Bw: $\exists B$: $A = M_{BB}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$$P_\varphi = P_A = \det \begin{pmatrix} X - \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X - \lambda_n \end{pmatrix} = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n). \quad \square$$

La 5.6.22

Es sei K ein Körper.

Dann sind äquivalent:

$$(i) \quad \forall p \in K[X], \deg(p) \geq 1 \Rightarrow \exists \lambda \in K : p(\lambda) = 0, \text{ d.h.}$$

$K \text{ ist algebraisch abgeschlossen}$

$$(ii) \quad \forall p \in K[X], p \neq 0 \Rightarrow p \text{ zerfällt in Linearfaktoren,}$$

z.B. $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen. (Fundamentalsatz der Algebra)

K Körper

Def 5.6.23

V Vektorraum über K mit $\dim V = n$

$\varphi \in \text{End}(V)$

Es sei $\lambda \in K$ ein EW von φ , d.h.

$$p_{\varphi}(\lambda) = 0$$

$$p = (x - \lambda)^r q$$

$$q(\lambda) \neq 0$$

r ist die algebraische Vielfachheit von φ .

Prop 5.6.25

$$\text{alg. Vielfachheit} \geq \text{geom. Vielfachheit}$$

Bw: $r = \text{alg. VF von } \lambda$

$s = \text{geom. VF von } \lambda$
 $= \dim E_\lambda(\varphi).$

Wähle Basis $(b_1, \dots, b_s)$
von $E_\lambda(\varphi)$

Setze mit $(v_1, \dots, v_{n-s})$ zu Basis von V fort.

$$B = (b_1, \dots, b_s, v_1, \dots, v_{n-s}).$$

$$A = M_{BB}(\varphi) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{array}{c} ? \\ \vdots \end{array}} \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_s$

$$P_\varphi = P_A = \det(X \mathbb{1} - A)$$

$$= \det \begin{pmatrix} X - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & X - \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{matrix} \begin{pmatrix} ? \\ \vdots \end{pmatrix}$$


$$= (X - \lambda)(X - \lambda) \dots (X - \lambda) q(X)$$

$$= (X - \lambda)^s q(X)$$

Der Faktor $(X - \lambda)$ kommt mind. mal s mal vor.

$\Rightarrow$ Algebraische Vielfachheit $\geq s$.



Satz 5.6.26 Diagonalisierbarkeit & algebraische Vielfachheit

K Körper

V Vektorraum über K mit $\dim V = n$

$\varphi \in \text{End}(V)$

Dann sind äquivalent:

(i) φ ist diagbar

(ii) φ zerfällt über K in Linearfaktoren

UND

$\forall \lambda \in W$ von φ : alg. Vielfachheit von λ = geom. Vielfachheit von λ

Bw: (i) $\Rightarrow$ (ii): $\exists B: M_{BB}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$

Jetzt einfache Rechnung.

(ii) $\Rightarrow$ (i): p_φ zerf. in Linearfaktoren
 $\Rightarrow p_\varphi = \alpha (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k}$

$n = \deg p_\varphi = r_1 + \cdots + r_k.$

Also ist die Summe der alg. Vielfachheiten gleich n .

Weil aber jede alg. Vielfachheit gleich der geom. Vielfachheit ist, gilt

Die Summe der geom. Vielfachheiten ist gleich n .

Also ist φ diagbar nach Satz 5.6.18 