

Lineare Algebra I für die Fachrichtung Informatik Wintersemester 2023/24

Erinuerung:

A diagbar, wenn

$$\exists S \in GL(n, K): S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ Diagonalmatrix}$$

Satz
5.6.26

A diagbar



p_A zerfällt in Linearfaktoren

$$p = (x - \lambda_1)^{k_1} (x - \lambda_2)^{k_2} \dots$$

UND

$$\forall \lambda \text{ EW: } \text{algebraische VFH}(\lambda) = \underbrace{\text{geom. VFH}(\lambda)}_{\dim(E_\lambda)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_A = X^2 = (X - 0)^2$$

$$\ker(0I - A)$$

1dim.

K algebraisch abgeschlossen

$\Leftrightarrow$ Jedes Polynom $p \in K[X]$

mit $p \neq 0$ zerfällt über K
in Linearfaktoren

$\mathbb{C}$

$\supset$
 $\mathbb{R}$
 $\supset$
 $\mathbb{Q}$

K
 $\vdots$

$\mathbb{F}_4$

$\supset$

$\mathbb{F}_2$

$\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

L

$\vdots$

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

A ~~trigonalisierbar~~ ^{diagonalisierbar} wenn
 $\exists S \in GL(n, K):$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \\ 0 & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix
~~Diagonalmatrix~~

A ~~trigbar~~
~~trigbar~~



p_A zerfällt in Linearfaktoren

UND

$\forall \lambda \text{ EW: } \text{algebraische VFH}(\lambda) = \underbrace{\text{geom. VFH}(\lambda)}_{\dim(E_\lambda)}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \\ 0 & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & * & \\ 0 & \mu_2 & \\ & & \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & ? & \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 & \\ & & \lambda_3 \mu_3 \end{pmatrix}$$

Satz 5.7.1 Trigonalisierbarkeit
 $n \in \mathbb{N}$

K Körper

$$A \in K^{n \times n}$$

Dann sind äquivalent:

(i) A ist trigonalisierbar, d.h. $\exists S \in GL(n, K): S^{-1}AS = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \\ 0 & & \end{pmatrix}$ obere Dreiecksmatrix

(ii) p_A zerfällt in Linearfaktoren (automatisch für $K = \mathbb{C}$)

Bw: (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$p_A = p_{\tilde{A}} = \det(X \mathbb{1} - \tilde{A})$$

$$= \det \begin{pmatrix} X - \lambda_1 & & * \\ & X - \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & X - \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

$n=1$ ✓

Schritt $n \rightarrow n+1$:

$$p_A = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_{n+1})$$

$$p_A(\lambda_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 \text{ EW von } A.$$

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ \varphi(v) &= \lambda v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\exists v_1 \neq 0} : Av_1 = \lambda_1 v_1.$$

Setze (v_1) zu einer gerndn. Basis fort:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & * \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \underbrace{\hspace{10em}}_n \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}^{n+1} \end{matrix} \quad C \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1})$

$$\underbrace{(X-\lambda_1) \dots (X-\lambda_{n-1})}_{\text{zerfällt in Linearf.}} = p_A = p_{\tilde{A}} = \det(X \mathbb{1} - \tilde{A})$$

$$= \det \begin{pmatrix} \overbrace{X-\lambda_1 \quad * \quad * \quad * \quad *} & \\ \underbrace{0 \quad \vdots \quad 0}_{\downarrow} & X \mathbb{1} - C \end{pmatrix}$$

$$= (X-\lambda_1) \underbrace{\det(X \mathbb{1} - C)}_{p_C}$$

$$= (X-\lambda_1) p_C \leftarrow \text{zerfällt in Linearfaktoren.}$$

Idee: Induktionsschritt angewandt auf C

ergibt $(v_2, v_3, \dots, v_{n+1})$, sodass

b.zgl. $(v_1, \dots, v_{n+1})$:

$$\tilde{A} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & * & * & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

FA

Satz 5.7.2 Cayley-Hamilton
 $n \in \mathbb{N}$

K Körper

$$A \in K^{n \times n}$$

Dann gilt:

$$p_A(A) = 0$$

Bw: Wir setzen voraus, dass man K erweitern kann zu $\mathbb{L}$, wo p_A in Linearfaktoren zerfällt.

OBdA: $\mathbb{L} = K$. Nach 5.7.1 können wir annehmen, dass

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \lambda_2 & * \\ 0 & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$p_A = (X - \lambda_1) \cdot (X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n).$$

$$p_A(A) = (A - \lambda_1 \mathbb{1}) \cdot (A - \lambda_2 \mathbb{1}) \cdots (A - \lambda_n \mathbb{1}).$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda_k \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_k & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & \cdots & 0 & \\ & & & & \lambda_n - \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$W_k = \text{LH}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{0\} = W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots \subseteq W_n = K^n.$$

$$\text{Beh: } \forall k. \quad v \in W_k : (A - \lambda_k I) v \in W_{k-1}.$$

$$v \in \text{LH}(e_1, \dots, e_k) \quad (A - \lambda_k I) e_j \in W_{k-1} \quad \forall j \leq k.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_k & & & * \\ & \ddots & & \\ & & 0 & * \\ & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & \vdots \\ & & & \lambda_n - \lambda_k \end{pmatrix}$$

Sei $v \in \mathbb{R}^n = W_n$

$$p_A(A)v = (A - \lambda_1 \mathbb{1})(A - \lambda_2 \mathbb{1}) \cdots \underbrace{(A - \lambda_{n-1} \mathbb{1})(A - \lambda_n \mathbb{1})v}_{\in W_{n-1}} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\in W_{n-2}} \\ = 0$$



z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 13 & -42 \\ 0 & 1 & 1024 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p_A = (x-1)(x-1)(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

Cayley-Hamilton:

$$(A-1)(A-1)(A+1) = 0$$

$$A^3 - A^2 - A + 1 = 0$$

$$\boxed{A^3 = A^2 + A - 1}$$

$$A^6 = (A^3)^2 = (A^2 + A - 1)^2$$

$$= A^4 + A^3 - A^2 + A^3 + A^2 - A - A^2 - A + 1$$

$$= \dots = \alpha A^2 + \beta A + \gamma 1.$$

$$A^3 - A^2 - A + 1 = 0 \quad | \cdot A^{-1}$$

$$A^2 - A - 1 + A^{-1} = 0$$

$$\boxed{A^{-1} = -A^2 + A + 1}$$

(siehe auch Aufgabe 2
Übungsblatt 12)

K Körper

①

V Vektorraum über K

$\varphi \in \text{End}(V)$

Was ist φ^k für "große" Werte von k ?

①

$A \in K^{n \times n}$

$n \in \mathbb{N}$

Was ist A^k für "große" Werte von k ?

für
diagbar
✓

②

$A, B \in K^{n \times n}$

Sind A und B ähnlich?

(gibt es ein $S \in GL(n, K) : AS = SB$?)

für diagbar ✓

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix}$

Jordansche Normalform: K Körper

$$A \in K^{n \times n}$$

p_A zerfällt in Linearfaktoren.

$$\Rightarrow \exists S \in GL(n, K)$$

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \boxed{J_{n_1}(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{J_{n_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \boxed{J_{n_3}(\lambda_3)} & \\ \circ & & & \boxed{J_{n_m}(\lambda_m)} \end{pmatrix}$$

Jeder Jordan-Block ist von der Form

$$\mathcal{J}_{n_j}(X_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & 0 \\ & \lambda_j & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_j \mathbb{1}_{n_j} + N_{n_j}$$

$$N_{n_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung ist eindeutig
bis auf Permutation der Blöcke.

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 42 & 1 & 0 \\ & 42 & 1 \\ & & 42 \\ \hline 0 & & 42 \end{array} \right)$$

$$(X - 42)^4$$

$$A_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 42 & 1 & 0 \\ & 42 & 0 \\ \hline 0 & 42 & 1 \\ & & 42 \end{array} \right)$$

$$(X - 42)^4$$

z.B.: Gegeben rekursiv definierte Folgen von ganzen Zahlen:

$$a_{k+1} = a_k + b_k, \quad a_0 = 1, b_0 = 0$$

$$b_{k+1} = b_k - a_k \quad /$$

k	0	1	2	3	
a_k	1	1	0	-2	-4
b_k	0	-1	-2	-2	0 ...

Gibt es eine geschlossene Formel?

$$X_k \in \mathbb{C}^2$$

$$X_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k + b_k \\ -a_k + b_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = A X_0$$

$$X_2 = A A X_0$$

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = X_k = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Was ist A^k ?

$$\begin{aligned} p_A &= \det \begin{pmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X-1 \end{pmatrix} = (X-1)^2 + 1 = (X-1)^2 - i^2 \\ &= (X-1-i)(X-1+i) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1+i$$

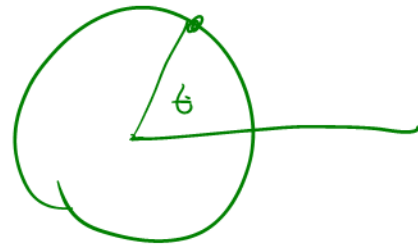
$$\lambda_2 = 1-i$$

$\exists S \dots$

$$A = S \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} S^{-1}$$

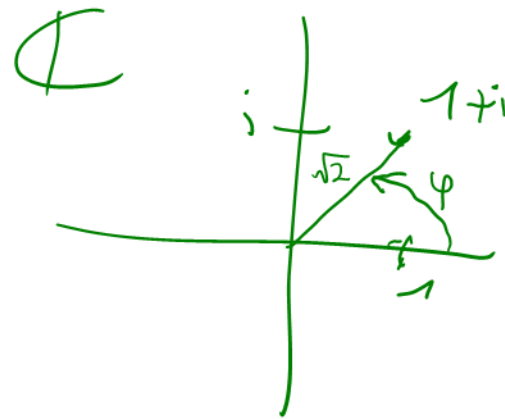
$$A^k = S \begin{pmatrix} (1+i)^k & 0 \\ 0 & (1-i)^k \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$e^{ik} = \cos t + i \sin t$$



$$(1+i)^k$$

$$= \left(\sqrt{2} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}} \right)^k$$



$$\varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$= (\sqrt{2})^k e^{ik \frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{(\sqrt{2})^k}} \cos\left(k \frac{\pi}{4}\right) + i (\sqrt{2})^k \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right)$$

Was ist S ?

Eigenraum zum EW $\lambda_1 = 1+i$

$$E_{\lambda_1} = \ker(\lambda_1 \mathbb{1} - A) = \ker \begin{pmatrix} 1+i-1 & -1 \\ 1 & 1+i-1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{LH} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{\lambda_2} = \ker(\lambda_2 \mathbb{1} - A) = \ker \begin{pmatrix} 1-i-1 & -1 \\ 1 & 1-i-1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{LH} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right)$$

$$\leadsto S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{-i-i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\leadsto A^k = S \begin{pmatrix} (1+i)^k & 0 \\ 0 & (1-i)^k \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+i)^k & 0 \\ 0 & (1-i)^k \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+i)^k & (1-i)^k \\ i(1+i)^k & -i(1-i)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+i)^k + (1-i)^k & -i(1+i)^k + i(1-i)^k \\ i(1+i)^k - i(1-i)^k & (1+i)^k + (1-i)^k \end{pmatrix}$$

$$(1+i)^k = \sqrt{2}^k e^{i k \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^k \left(\cos\left(k \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$(1-i)^k = \sqrt{2}^k e^{-i k \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^k \left(\cos\left(k \frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$(1+i)^k + (1-i)^k = 2 \sqrt{2}^k \cos\left(k \frac{\pi}{4}\right).$$

$$(1+i)^k - (1-i)^k = 2i \sqrt{2}^k \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Also: } A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+i)^k + (1-i)^k & -i(1+i)^k + i(1-i)^k \\ i(1+i)^k - i(1-i)^k & (1+i)^k + (1-i)^k \end{pmatrix}$$

$$= (\sqrt{2})^k \begin{pmatrix} \cos\left(k \frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(k \frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(k \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

Zurück zum Anfang:

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = V_k = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\sqrt{2})^k \begin{pmatrix} \cos(k \frac{\pi}{4}) \\ -\sin(k \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Also sind

$$a_k = (\sqrt{2})^k \cos\left(k \frac{\pi}{4}\right)$$

und

$$b_k = -(\sqrt{2})^k \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right)$$

geschlossene Formeln für $(a_k)_k$ und $(b_k)_k$.

(Es ist bemerkenswert, dass man diesen Formeln überhaupt nicht ansehen kann, dass sie nur ganzzahlige Werte liefern)

(Mehr zu rekursiven Folgen
und Differenzengleichungen
im Skript
5.6.28
und
5.6.27.)

Ausblick:

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[t=0]{A} \mathbb{R}^n \xrightarrow[t=1]{A} \mathbb{R}^n \xrightarrow[t=2]{\dot{A}}$$

$$y'(t) = A y(t)$$

$\leadsto$

$$y(t) = e^{tA} y(0)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$