Lineare Algebra I
für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 2023/24

Mengen $A = B$

$$\Longleftrightarrow \boxed{A \subseteq B \quad \text{und} \quad B \subseteq A}$$

Matrizen $A = B$

$\Longleftrightarrow$ gleich viele Zeilen,
gleich viele Spalten, alle Einträge sind gleich

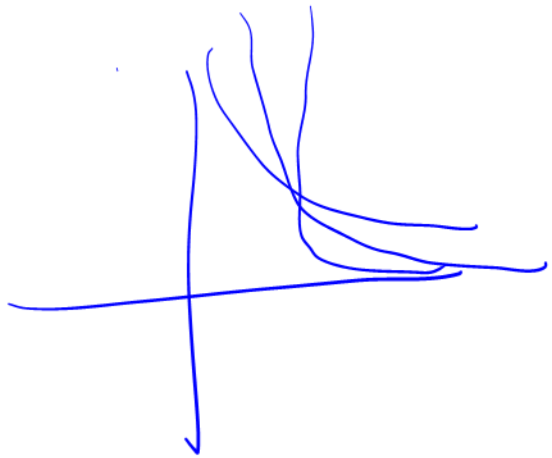
Funktionen $f, g : X \to Y$

$$\boxed{f = g} \Longleftrightarrow \boxed{\forall x \in X \quad f(x) = g(x)}$$

---

z.B.: $I = (0, \infty) = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$.

$$\mathbb{R}^I = \{f : I \to \mathbb{R}\}.$$



$$f_1 : I \to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{t}$$

$$f_2 : I \to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

$$f_3 : I \to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{t^3}$$

Zeigen Sie: $\{f_1, f_2, f_3\}$ lin. unabh.

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3} \alpha_j f_j = 0}$$

Nullfunktion

(z.z: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$)

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^I \quad \text{, d.h.}$$

$$\forall x \in I \quad \boxed{\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}}$$

$$\alpha_1 \cdot \frac{1}{x} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{x^2} + \alpha_3 \cdot \frac{1}{x^3} = 0$$

$x = 1$ $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$x = 2$ $$\alpha_1 \cdot \frac{1}{2} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{4} + \alpha_3 \cdot \frac{1}{8} = 0 \quad \Big| \cdot 8 \qquad 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$x = \frac{1}{2}$: $$\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 8 = 0 \quad \Big| :2 \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$$

$v_1, v_2, \dots, v_k$ lin abh.

$\not\Rightarrow$ $v_1 \in LH(v_2, \dots, v_k)$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Unterschied zwischen abstraktem Polynom und Polynomfunktion?

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ X \longmapsto X^2 + X + 1 \end{pmatrix}$$

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 + x + 1 \end{pmatrix}$$

Zwei Funktionen f, g sind gleich

$\Longleftrightarrow$

$\forall x \in \mathbb{K} \quad f(x) = g(x)$

In $f : X \longrightarrow Y$

kann man nur Elemente aus X einsetzen. Man erhält dann Elemente aus Y.

$$p \in \mathbb{K}[X] = LH(\underbrace{1, X, X^2, X^3, \dots}_{\text{Basis}}) \qquad X^0 = 1$$

$$p = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X] \subseteq \mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$$

$$p, q \in \mathbb{K}[X]$$

$$p = q$$

$\Longleftrightarrow$ Alle Koeffizienten sind gleich.

$$(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1 \neq X^2 + 2X + 4$$

Einsetzen in $p \in K[X]$

kann man

- Skalare aus K
- Skalare aus $L \supseteq K$
- $A \in K^{n \times n}$ oder $A \in L^{n \times n}$

Heraus kommt immer ein Objekt vom gleichen Typ.

$$p = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

$$p(i) = i^2 + i + 1 = i$$

$$p\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \\ x \mapsto x^2 + x + 1 \end{pmatrix}$$

Für $|\mathbb{K}| = \infty$, dann kann man aus der Funktion das Polynom rekonstruieren.

Für $|\mathbb{K}| < \infty$, geht hiebei Information verloren.

$\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$. $p = X \in \mathbb{F}_2[X]$ $q = X^2 \in \mathbb{F}_2[X]$.

$X \neq X^2$ in $\mathbb{F}_2[X]$.

ABER: $\forall x \in \mathbb{F}_2$ $p(x) = q(x)$

$$\mathbb{F}_2[X] \longrightarrow \mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_2}$$

∞ viele Elemente

4 Elemente

Zuweisung kann nicht injektiv sein! (5.4.15 im Skript)

Wie zeige ich, dass $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{K}[X]$ linear unabh. sind?

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0$$

$p_1 = 2X^2 + 3X + 1 \qquad p_2 = X^3 - 5 \qquad p_3 = X^2 + 7$

$$\alpha_1 2X^2 + \alpha_1 3X + \alpha_1 1 + \alpha_2 X^3 - \alpha_2 \cdot 5 + \alpha_3 X^2 + \alpha_3 7 = 0$$

in $\mathbb{K}[X]$.

$$\alpha_2 X^3 + (2\alpha_1 + \alpha_3)X^2 + 3\alpha_1 X + (\alpha_1 - 5\alpha_2 + 7\alpha_3) = 0$$

$$\iff \begin{aligned} \alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 &= 0 \\ \alpha_1 - 5\alpha_2 + 7\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Direkte Summen von Untervektorräumen

$\mathbb{K}$ Körper

V Vektorraum über $\mathbb{K}$.

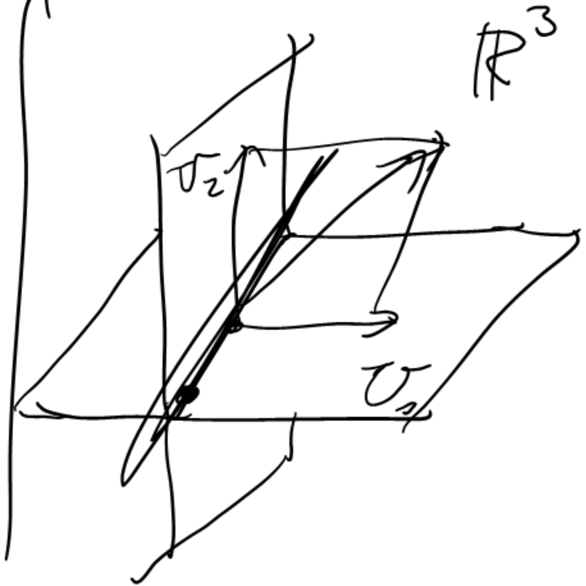
$U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ UVR.

$U_1 + U_2 + U_3 = \{ v_1 + v_2 + v_3 \mid v_1 \in U_1, v_2 \in U_2, v_3 \in U_3 \}$.

$U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 = \bigoplus_{k=1}^{3} U_k$, wenn

$U_1 \times U_2 \times U_3 \longrightarrow V$ injektiv ist

$(v_1, v_2, v_3) \longmapsto v_1 + v_2 + v_3$



z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$V = \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_2 = LH \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_3 = LH \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

z.z: V ist direkte Summe von U_1, U_2, U_3.

z.z: $\varphi : (U_1 \times U_2 \times U_3 \to V)$ ist bijektiv.

z.z. φ injektiv.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(z.z: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$.)

$$\begin{pmatrix} a+\lambda & \lambda+\mu \\ \lambda-\mu & b+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ LGS

$$\left| \begin{array}{l} a + \lambda = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \\ b + \lambda = 0 \end{array} \right. \iff \begin{array}{cccc|c} a & b & \lambda & \mu & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Gauß $\rightsquigarrow$ $a=0$, $b=0$, $\lambda=0$, $\mu=0$

$\Longrightarrow \varphi$ injektiv.

$\varphi: \underbrace{U_1}_{2\dim} \times \underbrace{U_2}_{1\dim} \times \underbrace{U_3}_{1\dim} \longrightarrow \underbrace{V}_{4\dim}$ injektiv.

φ inj. $\dim \text{Def}b = \dim \text{Ziel}b$

$\Longrightarrow \varphi$ surj. $\square$

Vektorraumkomplemente

V VR

$U \subseteq V$ UVR

ges: $W \subseteq V$ UVR $U \oplus W = V$

$V = K^n$

~~$U = LH(\ldots)$~~
~~$U = \mathrm{Ker}(\varphi)$~~

Suche Basis von U.

$(u_1, \ldots, u_k)$ geordn. Basis von U

Fortsetzen zu Basis von $V = K^n$

z.B.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}}_{\text{geg. Basis von } U}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Basis von Komplement.

---

z.B.:

$1 \cdot (-1)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{Basis von } U}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\text{Basis von } U} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{Basis für } W}$$

Anzahl der „führenden Nullen" verschieden

$\rightsquigarrow$ Linear unabhängig.

Quotientenvektorräume

V VR

$U \subseteq V$ UVR

V/U QuotientenVR.

$$\boxed{q : V \longrightarrow V/U \quad \text{linear, surjektiv} \qquad \boxed{\ker(q) = U}}$$

$\mathbb{R}^4$

$U = LH\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

V/U

$\forall w \in V/U \quad \exists v \in V:$

$w = q(v)$

$= [v]_U$

$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$

$[v] = [w]$

$v - w \in U.$

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix} \in U = LH\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 [v_1] + \alpha_2 [v_2] = [0]$$

$$\Longleftrightarrow \quad [\alpha v_1 + \alpha_2 v_2] = [0]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha v_1 + \alpha_2 v_2 \in U.$$

$V = U \oplus W$

$$\left(\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V/U \\ w & \longmapsto & [w] \end{array} \right) \text{ Iso.}$$

$(w_1, \dots, w_m)$ Basis von W

$\Longrightarrow$ $[w_1], \dots, [w_m]$ Basis von V/U.

Ähnlichkeit von Matrizen

A ähnlich zu B

$\Longleftrightarrow \quad \exists\, S \in GL(n,\mathbb{R}) \quad SAS^{-1} = B.$

Ähnlichkeitsinv. $\quad A$ ähnlich zu B

$\Longrightarrow \quad \boxed{\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B} \quad \boxed{p_A = p_B}$

$\boxed{\det A = \det B}$

$\boxed{\operatorname{Spur} A = \operatorname{Spur} B}$

Z.B.: Zeigen Sie, dass keine zwei der folgende 5 Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ zueinander ähnlich sind:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $E=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Rang von allen 5 Matrizen ist 2 $\rightsquigarrow$ keine Information.

$\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}\, B = 2$

$\mathrm{Spur}(C) = 7$

$\mathrm{Spur}(D) = \mathrm{Spur}(E) = 3$

Also ist C zu keiner andren Matrix ähnlich.

$\det A = \det B = 1$

$\det C = \det D = 2$

$\det E = -9$

Also ist E zu keiner andr Matrix ähnlich.

det und Spur zusammen sagen uns:

B, C, D, E sind paarweise NICHT ähnlich.

Bleibt nur noch zu zeigen $A = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ist NICHT ähnlich zu $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Möglichkeit

(Diagonalisierbarkeit)

Man rechnet nach,

dass B NICHT diagbar ist.

A ist aber eine Diagonalmatrix, also insbesondere diagbar.

Also können A und B nicht ähnlich sein.

2. Möglichkeit

(per Widerspruch)

Angenommen A wäre ähnlich zu B.

Dann gäbe es ein $S \in GL(2, \mathbb{R})$ mit

$$B = SAS^{-1}$$

Also:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = SS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lightning.$$

Bestimmung von Eigenwerten und Eigenräumen bei Matrizen, die nicht in Dreiecksform gegeben sind

z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

(zu groß für eine Klausuraufgabe).

$$p_A = \det(X \mathbb{1}_4 - A)$$

$$= \det \begin{pmatrix} x-2 & -5 & 3 & -1 \\ -2 & x-3 & 0 & 2 \\ -4 & -6 & x & 4 \\ -1 & -5 & 3 & x-2 \end{pmatrix} \quad \Big|\ \text{Faktor } (-1) \text{ aus 4. Zeile herausziehen (G3)}$$

$$= (-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & -5 & 3 & -1 \\ -2 & x-3 & 0 & 2 \\ -4 & -6 & x & 4 \\ 1 & 5 & -3 & -x+2 \end{pmatrix} \quad \text{Zeilen vertauschen (G2)}$$

$$= \cancel{(-1)(-1)} \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & -x+2 \\ -2 & x-3 & 0 & 2 \\ -4 & -6 & x & 4 \\ x-2 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \Big|\cdot 2 \quad \text{(G1)}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & -x+2 \\ 0 & x+7 & -6 & -2x+6 \\ -4 & -6 & x & 4 \\ x-2 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$I \cdot 4$ (G1)

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & -x+2 \\ 0 & x+7 & -6 & -2x+6 \\ 0 & 14 & x-12 & -4x+12 \\ x-2 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$I \cdot (-x+2)$ (G1)

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & -x+2 \\ 0 & x+7 & -6 & -2x+6 \\ 0 & 14 & x-12 & -4x+12 \\ 0 & -5x+5 & 3x-3 & x^2-4x+3 \end{pmatrix}$$

| nach 1. Spalte entwickeln

$$= \det\begin{pmatrix} x+7 & -6 & -2x+6 \\ 14 & x-12 & -4x+12 \\ -5x+5 & 3x-3 & x^2-4x+3 \end{pmatrix}$$

Das Polynom kann man faktorisieren zu

$$x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$$

$$= \det\begin{pmatrix} x+7 & -6 & -2(x-3) \\ 14 & x-12 & -4(x-3) \\ -5(x-1) & 3(x-1) & (x-1)(x-3) \end{pmatrix}$$

| Linearität in der 3. Spalte (C3) $(x-3)$ raus ziehen.

$$=(x-3)\det\begin{pmatrix} x+7 & -6 & -2 \\ 14 & x-12 & -4 \\ -5(x-1) & 3(x-1) & (x-1) \end{pmatrix}$$

| Linearität in der 3. Zeile (G3)

$$=(x-3)(x-1)\det\begin{pmatrix} x+7 & -6 & -2 \\ 14 & x-12 & -4 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cdot(-3)$

| (-3)-faches von 3. Spalte auf 2. Spalte addieren (G2)

$$= (x-3)(x-1)\det\begin{pmatrix} x+7 & 0 & -2 \\ 14 & x & -4 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

| nach 2. Spalte entwickeln.

$$= (x-3)(x-1)\,x\,\det\begin{pmatrix} x+7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

| Formel für (2x2)-Determinanten

$$= (x-3)(x-1)\,x\,\big((x+7)\cdot 1-(-5)(-2)\big) = (x-3)(x-1)\,x\,(x-3)$$

$$= \underline{\underline{(x-3)^2(x-1)\,x}}\,.$$

Die Matrix A hat also 3 verschiedene EW:

$\lambda = 3$ mit algebraischen Vielfachheit 2

$\lambda = 1$ mit algebraischen Vielfachheit 1

$\lambda = 0$ mit algebraischen Vielfachheit 1

Anmerkung: $3+3+1+0 = 7$

$\text{Spur}(A) = 2+3+0+2 = 7$

Das gilt immer, wenn p_A in Linearfaktoren zerfällt.

(So hat man eine Möglichkeit, wie man sehen kann, ob man sich verrechnet hat)

Eigenraum $E_3(A) = \ker(3\mathbb{1} - A)$

$$= \ker \begin{pmatrix} 3-2 & -5 & 3 & -1 \\ -2 & 3-3 & 0 & 2 \\ -4 & -6 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & 3 & 3-2 \end{pmatrix} \qquad \text{Gauß}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -5 & 3 & -1 & \\ -2 & 0 & 0 & 2 & I \cdot (-\frac{1}{2}) \quad (G3) \\ -4 & 6 & 3 & 4 & \\ -1 & -5 & 3 & 1 & \\ \hline 1 & -5 & 3 & -1 & I \quad I \cdot 4 \quad I \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \quad (G1) \\ -4 & 6 & 3 & 4 & \\ -1 & -5 & 3 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

$$
\begin{array}{cccc|ll}
1 & -5 & 3 & -1 & & \\
0 & -5 & 3 & 0 & \mid\cdot(-2) & \mid\cdot(-2) \\
0 & -14 & 15 & 0 & & \\
0 & -10 & 6 & 0 & & \\
\hline
1 & -5 & 3 & -1 & & \\
0 & -5 & 3 & 0 & & \\
0 & -4 & 9 & 0 & \mid\cdot(-1) & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
1 & -5 & 3 & -1 & & \\
0 & -1 & -6 & 0 & \mid\cdot(-1) & (G_3) \\
0 & -4 & 9 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
1 & -5 & 3 & -1 & & \\
0 & 1 & 6 & 0 & \mid\cdot 4 & (G_1) \\
0 & -4 & 9 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & -5 & 3 & -1 & \\
0 & 1 & 6 & 0 & \\
0 & 0 & 33 & 0 & \mid \cdot \left(\frac{1}{33}\right) \quad (G3) \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & -5 & 3 & -1 & \\
0 & 1 & 6 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid \cdot (-3) \quad \mid \cdot (-6) \quad (G1) \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & -5 & 0 & -1 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid \cdot 5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & 0 & 0 & -1 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

$x_4 = t \in \mathbb{R}$

$x_3 = 0$

$x_2 = 0$

$x_1 - x_4 = 0 \implies x_1 = t$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3(A) = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$\dim E_3(A) = 1 < 2$

Also ist A nicht diagbar.

So ähnlich berechnet man auch

$$E_1(A) = LH\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_0(A) = LH\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(E_0 gilt immer:

$$E_0(A) = \ker(A)$$

da Kern ist der Eigenraum zum EW $\lambda = 0$)

Ein anderes Beispiel für Eigenwerte und Eigenräume (von der Übung am 12.2.2024) finden Sie im ILIAS-Kurs.

Viel

Erfolg

bei

der

Klausurvorbereitung!