Lösungsvorschläge für die Klausur „Lineare Algebra I“ am 20.3.2024

Aufgabe 1 *(8 Punkte)*

Gegeben seien die vier Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ der reelle Untervektorraum, der von diesen vier Matrizen erzeugt wird.

(a) Geben Sie eine Basis von U an. Welche Dimension hat U?

(b) Bestimmen Sie ein Vektorraumkomplement von U in $\mathbb{R}^{2\times 2}$, also einen Untervektorraum W mit der Eigenschaft $\mathbb{R}^{2\times 2} = U \oplus W$.

(c) Zeigen Sie: U ist ein Unterring des Ringes $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(d) Zeigen Sie: Der Ring U ist nicht kommutativ.

Lösung zu Aufgabe 1

(a)
Wir setzen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Da $A_4 = A_1 + A_2 - A_3$ gilt, wird der Vektorraum U von A_1, A_2 und A_3 erzeugt.
Wir zeigen nun, dass die Menge $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig ist: Dazu machen wir den Ansatz

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ und zeigen, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&& \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow && \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow && \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow && \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \text{ und } \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \text{ und } \alpha_2 &= 0 \text{ und } \alpha_1 = 0
\end{aligned}$$

Damit wissen wir, dass $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ gilt und durch Einsetzen in eine der ersten beiden Gleichungen erhalten wir auch $\alpha_3 = 0$.
Somit sind alle drei Skalare gleich 0 und die Matrizen A_1, A_2, A_3 sind linear unabhängig und somit eine Basis für U.
Weil die Basis drei Elemente hat, gilt: $\dim(U) = 3$.
Alternativ kann man auch – wenn man das sauber aufschreibt – den Isomorphismus

$$\Phi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

verwenden, und die vier Matrizen A_1, A_2, A_3, A_4 auf vier Spaltenvektoren

$$\Phi(A_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Phi(A_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi(A_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi(A_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

abbilden und dann das Problem im $\mathbb{R}^4$ lösen.
Hier gibt es dann mehrere Verfahren, um von einem Untervektorraum, von dem ein Erzeugendensystem bekannt ist, eine Basis zu berechnen, z.B.

- Gauß auf den Spalten
- Erst Transponieren, dann Gauß auf den Zeilen, dann Zurücktransponieren
- Gauß direkt auf den Zeilen, aber am Ende nur solche Vektoren der Originalbasis verwenden, die zu Pivot-Elementen der Zeilenstufenform gehören

Beim Rechnen mit Spaltenvektoren ist es nicht notwendig, ausführlich zu beschreiben, was man tut, wenn das Ergebnis stimmt und die Schritte einigermaßen nachvollziehbar sind.
Was aber auf jeden Fall begründet werden muss, ist, warum man überhaupt das Problem auf Spaltenvektoren zurückführen darf. Also den oben genannten Isomorphismus erwähnen, bzw. eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ oder etwas vergleichbares.
(b)
Da U ein 3-dimensionaler Untervektorraum des 4-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist, reicht es, ein beliebiges Element in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ auszuwählen, das nicht in U liegt und der davon erzeugte 1-dimensioale Vektorraum ist ein Vektorraumkomplement von U in $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Beispielsweise können wir

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nehmen. Wir müssen nun zeigen, dass M nicht in U liegt. Setzen wir dazu

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = M$$

und rechnen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \quad \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \quad \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \text{ und } \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \text{ und } \alpha_2 = 0 \text{ und } \alpha_1 = 0 \end{aligned}$$

Hieraus folgt zuerst, dass α_1 und α_2 beide 0 sind, mit der zweiten Gleichung folgt, dass α_3 auch 0 ist und mit der ersten ergibt sich, dass $0 + 0 = 1$, was ein Widerspruch ist.
Also ist M nicht in U und $W = \mathrm{LH}(M)$ ist ein Vektorraumkomplement von $U = \mathrm{LH}(A_1, A_2, A_3)$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Alternativ kann man natürlich auch wieder den Isomorphismus nach $\mathbb{R}^4$ verwenden (siehe oben) und die drei Spaltenvektoren nebeneinander schreiben und durch einen vierten ergänzen. Lineare Unabhängigkeit dieser vier Spaltenvektoren lässt sich dann z.B. auch mit einer (4×4)-Determinante zeigen – oder mit Gauß – oder falls die Vektoren schon in einer Art Stufenform sind mit der Anzahl der führenden Nullen.

(c)
Da U ein Untervektorraum ist, folgt, dass U unter Addition abgeschlossen ist und die 0-Matrix enthält.
Da die Matrix A_1 in U liegt und A_1 offenbar die Einheitsmatrix ist, enthält U auch das 1-Element des Ringes $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Es bleibt zu zeigen, dass U unter Matrixmultiplikation abgeschlossen ist. Nehmen wir also zwei Matrizen $A, B \in U$ und zeigen, dass das Produkt AB wieder in U liegt.
Da $A \in U$ liegt, gibt es $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \,.$$

Da $B \in U$ liegt, gibt es $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$B = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 \,.$$

Nun berechnen wir das Produkt:

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)\,(\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3) \\ &= \quad \alpha_1\beta_1 A_1 A_1 + \alpha_1\beta_2 A_1 A_2 + \alpha_1\beta_3 A_1 A_3 \\ &\quad + \alpha_2\beta_1 A_2 A_1 + \alpha_2\beta_2 A_2 A_2 + \alpha_2\beta_3 A_2 A_3 \\ &\quad + \alpha_3\beta_1 A_3 A_1 + \alpha_3\beta_2 A_3 A_2 + \alpha_3\beta_3 A_3 A_3 \,. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass das Produkt AB eine Linearkombination der neun Matrizen

$$A_1A_1,\ A_1A_2,\ A_1A_3,\ A_2A_1,\ A_2A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_1,\ A_3A_2,\ A_3A_3$$

ist. Wenn wir also zeigen können, dass jede dieser Matrizen wieder in U liegt, sind wir fertig.
Da $A_1 = \mathbb{1}_2$ die Einheitsmatrix ist, können wir alle Produkte, in denen ein A_1 vorkommt, ignorieren und es bleiben:

$$\begin{aligned} A_2A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1 \in U \,, \\ A_2A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_4 \in U \,, \\ A_3A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3 \in U \,, \\ A_3A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3 \in U \,. \end{aligned}$$

Also ist U unter Multiplikation abgeschlossen und ein Unterring (sogar eine Unter-$\mathbb{R}$-Algebra, aber das war nicht gefragt).
Alternativ kann man auch direkt sagen, dass – weil die Multiplikation bilinear ist – es ausreicht zu zeigen, dass das Produkt von zwei Basisvektoren wieder in U liegt. Und dann die vier Rechnungen oben durchführen.
(d)
Hier reicht es aus, zwei Matrizen in U zu finden, die nicht kommutieren. Beispielsweise ist

$$A_2A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \,,$$

was nicht das gleiche ist wie

$$A_3 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(Natürlich müssen auch nicht einmal alle Einträge des Matrixproduktes berechnet werden, sobald klar ist, dass die beiden Matrizen in mindestens einem Eintrag nicht übereinstimmen.)
Nicht zulässig ist eine Aussage der Form „Der Ring ist nicht kommutativ, weil Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist“. Es gibt durchaus kommutative Unterringe von nichtkommutativen Ringen, z.B. ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

ein kommutativer Unterring des nichtkommutativen Ringes $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Deshalb ist es wichtig, konkret zwei nichtkommutierende Matrizen anzugeben, *die beide zum Unterring gehören*!
Dass die angegebenen Matrizen um Unterring gehören, muss gezeigt/begründet werden – außer man verwendet nur die Matrizen A_2, A_3, A_4, bei denen ist es natürlich klar, dass sie dazugehören.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit geordneter Basis $\mathsf{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Es seien

$$\begin{aligned} c_1 &:= b_1 + b_2 - b_3\,, \\ c_2 &:= b_2 - b_3\,, \\ c_3 &:= b_1 + b_3\,. \end{aligned}$$

Weiter sei $\varphi : V \to V$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung mit

$$\begin{aligned} \varphi(c_1) &= b_1 + b_2 - b_3\,, \\ \varphi(c_2) &= b_1\,, \\ \varphi(c_3) &= 2b_1 + b_2 + b_3\,. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: $\mathsf{C} := (c_1, c_2, c_3)$ ist eine Basis von V.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\varphi)$, $\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\mathrm{id})$, $\mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{B}}(\mathrm{id})$ und $\mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{C}}(\varphi)$.

(c) Zeigen Sie: Falls $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ gilt, dann ist $\varphi : V \to V$ eine injektive Abbildung.

(d) Zeigen Sie: Falls $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt, dann ist $\varphi : V \to V$ nicht injektiv.

Lösung zu Aufgabe 2

(a)
Der Vektorraum V hat eine geordnete Basis aus 3 Vektoren. Somit ist V drei-dimensional.
Das Tupel $\mathsf{C} = (c_1, c_2, c_3)$ besteht aus aus 3 Vektoren. Wenn wir also zeigen, dass C ein Erzeugendensystem ist *oder* linear unabhängig, dann reicht dies aus, um zu zeigen, dass C eine Basis von V ist.
Wir zeigen lineare Unabhängigkeit. Es seien dazu Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$ gegeben mit

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 = 0\,.$$

Wir wollen nun daraus folgern, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ist.
Setzen wir nun die Definitionen von c_1, c_2 und c_3 ein:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 = 0 \\ \Longrightarrow\quad & \alpha_1(b_1 + b_2 - b_3) + \alpha_2(b_2 - b_3) + \alpha_3(b_1 + b_3) = 0 \\ \Longrightarrow\quad & \alpha_1 b_1 + \alpha_1 b_2 - \alpha_1 b_3 + \alpha_2 b_2 - \alpha_2 b_3 + \alpha_3 b_1 + \alpha_3 b_3 = 0 \\ \Longrightarrow\quad & (\alpha_1 + \alpha_3)b_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)b_2 + (-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)b_3 = 0\,. \end{aligned}$$

Da (b_1, b_2, b_3) nach Voraussetzung linear unabhängig sind, müssen die Vorfaktoren alle 0 sein, das führt zum folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \phantom{{}+\alpha_2} + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \phantom{{}+\alpha_3} &= 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Gauß-Algorithmus liefert:

α_1	α_2	α_3		
1	0	1	0	|das (-1)-fache auf die zweite Zeile addieren
1	1	0	0	
-1	-1	1	0	
1	0	1	0	|diese Zeile auf die dritte Zeile addieren
0	1	-1	0	
-1	-1	1	0	
1	0	1	0	
0	1	-1	0	|diese Zeile auf die dritte Zeile addieren
0	-1	2	0	
1	0	1	0	
0	1	-1	0	
0	0	1	0	

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform und jede Variable ist eine Pivot-Variable, also gilt

$$\alpha_3 = 0; \alpha_2 = 0 \text{ und } \alpha_1 = 0\,.$$

Also sind alle Skalare 0 und die lineare Unabhängigkeit ist bewiesen.
Alternativ kann man auch, sobald man die Matrix für das LGS aufgestellt hat, die Determinante verwenden, um zu zeigen, dass die Matrix invertierbar ist und somit kann es nur eine Lösung für $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ geben:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot(-1) - 0\cdot 1\cdot 1 = 1 \neq 0\,.$$

Alternativ kann man auch – statt der ganzen Rechnung – so vorgehen:
Wir stellen die Vektoren c_1, c_2, c_3 bezüglich der geordneten Basis B dar und erhalten:

$$(c_1)_{\mathsf{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(c_2)_{\mathsf{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(c_3)_{\mathsf{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zeigen, dass diese drei Vektoren eine Basis von $\mathbb{K}^3$ bilden. Das kann man unter anderem so zeigen, das man die Vektoren als Spalten nebeneinander in eine Matrix schreibt und zeigt, dass diese invertierbar ist, indem man die Determinante berechnet:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},.$$

Dann weiter wie oben.

Achtung: Es ist nicht zulässtig, direkt zu schreiben $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ldots$. Der Vektor c_1 ist im Allgemeinen kein Spaltenvektor. Er ist ein Element im Vektorraum V und es ist nicht angegeben (und für die Aufgabe auch irrelevant), welchen Typ die Elemente aus V haben. Man kann c_1 wie oben angegeben zur Basis B darstellen und erhält dadurch einen Spaltenvektor, mit dem man weiter rechnen kann, aber man darf kein Gleichheitszeichen zwischen c_1 und dem Spaltenvektor schreiben, da die beiden Objekte nicht gleich sind.
Alternativ kann man auch die definierenden Gleichungen für die Vektoren c_1, c_2, c_3 solange umformen und ineinadner einsetzen, bis man folgendes gezeigt hat:

$$\begin{aligned} b_1 &= c_1 - c_2 \\ b_2 &= -c_1 + 2c_2 + c_3 \\ b_3 &= -c_1 + c_2 + c_3\,, \end{aligned}$$

und dann argumentieren, dass (c_1, c_2, c_3) ein Erzeugendensystem (und mit $|\mathsf{B}| = |\mathsf{C}|$ auch eine Basis) sind, weil jeder Vektor der Orginalbasis B mit Vektoren aus C dargestellt werden kann.
NICHT zulässig ist die Argumentation: „Da jeder c-Vektor eine Linearkombination der b-Vektoren ist, und die b-Vektoren linear unabhängig sind, folgt, dass die c-Vektoren linear unabhängig sind.“ Das stimmt einfach nicht, beispielsweise ist $(b_1, b_2, b_1 + b_2)$ nicht linear unabhängig.
Ebenfalls NICHT zulässig sind Argumente, in denen man der Reihe nach zeigt: „c_1 ist linear unabhängig, weil ...“ und dann „c_2 ist linear unabhängig, weil ...“ ... Das ergibt keinen Sinn, weil lineare Unabhängigkeit keine Eigenschaft von einzelnen Vektoren ist, sondern von einer Menge oder einem Tupel von Vektoren.
(b)
In den Spalten der Matrix einer Darstellungsmatrix stehen die Bilder der Vektoren der Basis im Definitionsbereich, dargestellt zur Basis im Zielbereich. Wenn man dies weiß, kann man die Matrizen $\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\varphi)$ und $\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\mathrm{id})$ direkt hinschreiben, da die entsprechenden Darstellungen ja in der Aufgabenstellung gegeben sind:

$$\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},.$$

Die Matrix $\mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{B}}(\mathrm{id})$ ist die Inverse von $\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\mathrm{id})$.

Wir können sie also mit dem Gauß-Algorithmus berechnen:

$$\begin{array}{ccc|cccl}
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & |\text{das } (-1)\text{-fache auf die zweite Zeile addieren} \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & |\text{diese Zeile auf die dritte Zeile addieren} \\
0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & \\
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & |\text{diese Zeile auf die dritte Zeile addieren} \\
0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & |\text{diese Zeile auf die zweite Zeile addieren} \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & |\text{das } (-1)\text{-fache auf die erste Zeile addieren} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & \\
0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Also gilt:

$$\mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wichtig: Es gibt natürlich viele andere Möglichkeiten, diese Matrix zu invertieren. Wichtig ist alledings, dass jeder Schritt über **jedem** Körper erlaubt sein muss! Man darf also nie durch 2 oder irgendeine andere Zahl dividieren, mit Ausnahme von 1 und (-1).
Die letzte gesuchte Matrix $\mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{C}}(\varphi)$ erhalten wir nun einfach durch ein Matrixprodukt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{C}}(\varphi) &= \mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{B}}(\mathrm{id})\,\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\varphi) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Achtung: Manche sind verwirrt, dass hier nur zwei Matrizen multipliziert werden, weil bei Basiswechseln normalerweise drei Matrizen auftauchen und berechnen $\mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{B}}(\mathrm{id})\,\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\varphi)\,\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\mathrm{id})$, was nicht das richtige Ergebnis liefert. Man kann aber natürlich zuerst $\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{B}}(\varphi)$ berechnen und dann die „gewöhnliche“ Basiswechselformel

$$\mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{B}}(\mathrm{id})\,\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{B}}(\varphi)\,\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\mathrm{id})$$

verwenden. Das ist mehr Aufwand, aber völlig in Ordnung.
Achtung: Oft wird behauptet, man erhält $\mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{B}}(\varphi)$ durch Invertieren von $\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\varphi)$. Dies ist *nicht* zulässig. Die Inverse von $\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\varphi)$ ist – wenn sie existiert – die Matrix

$$(\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\varphi))^{-1} = \mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{B}}\left(\varphi^{-1}\right).$$

(c)

Ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist genau dann injektiv, wenn er bijektiv ist und dies ist genau dann der Fall, wenn eine Darstellungsmatrix (bezüglich irgendeiner Basis) invertierbar ist. Wir berechnen also die Determinante von $\mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{C}}(\varphi)$:

$$\begin{aligned}\det \mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{C}}(\varphi) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 2 = -2\,.\end{aligned}$$

Diese Rechnung ist bis jetzt über jedem beliebigen Körper gültig.
Wenn nun speziell $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ gilt, dann wissen wir, dass $-2 \neq 0$ ist und somit ist $\mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{C}}(\varphi) \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ invertierbar. Folglich ist φ bijektiv und insbesondere injektiv.
Alternativ kann man auch statt mit der Matrix $\mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{C}}(\varphi)$ mit der Matrix $\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(\varphi)$ argumentieren. Diese ist zwar *nicht* ähnlich zur gegebenen Matrix, aber *äquivalent*, und da Invertierbarkeit ja nur vom Rang abhängt, ist dies genauso in Ordnung. Statt Determinanten zu verwenden, kann man natürlich auch eine Darstellungsmatrix von φ bezüglich irgendwelcher Basen hernehmen und den Gauß-Algorithmus verwenden, um zu zeigen, dass der Kern trivial ist. Oder man berechnet von einer der Matrizen den Rang.
(d)
Wir haben in Aufgabenteil (c) gesehen, dass über jedem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ gilt:

$$\det \mathrm{M}_{\mathsf{C},\mathsf{C}}(\varphi) = -2\,.$$

Wenn nun speziell $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ ist, dann wissen wir, dass $-2 = -(1+1) = 0$ gilt. Somit ist die Determinante des Endomorphismus φ gleich 0 und φ ist nicht bijektiv. Da für Endomorphismen von endlichdimensionalen Räumen gilt, dass Injektivität und Surjektivität äquivalent sind, bedeutet dies, dass φ weder injektiv noch surjektiv ist. Insbesondere ist φ nicht injektiv.
Alternativ kann man auch über den Rang argumentieren. Wenn φ nicht vollen Rang hat, dann muss die Dimension des Kerns größer als 0 sein und somit φ nicht injektiv.
Alternativ kann man natürlich auch den Nicht-Null-Vektor angeben, der im Kern liegt: Es gilt:

$$\varphi(c_1 + c_2 + c_3) = \varphi(c_1) + \varphi(c_2) + \varphi(c_3) = (b_1 + b_2 + b_3) + b_1 + 0b_1 + b_2 + b_3 = 0\,.$$

Diesen Vektor findet man entweder durch einen Gauß-Algorithmus oder durch scharfes Hinsehen oder durch Ausprobieren – es gibt ja nur 7 Nicht-Null-Vektoren in V.
Alternativ kann man auch zwei unterschiedliche Vektoren finden, die auf das selbe Bild abgebildet werden, z.B.

$$\varphi(c_1) = \varphi(c_2 + c_3) \qquad \text{oder} \qquad \varphi(c_1 + c_2) = \varphi(c_3)\,.$$

Aufgabe 3 *(8 Punkte)*

Gegeben sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von Ψ ist und bestimmen Sie den dazugehörigen Eigenwert.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von Ψ.

(c) Geben Sie eine geordnete Basis B des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren von Ψ besteht. Geben Sie die Matrix $M := \mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{B}}(\Psi)$ an.

(d) Bestimmen Sie Determinante, Spur und Rang der Matrix M.

(e) Zeigen Sie, dass M invertierbar ist und bestimmen Sie Determinante, Spur und Rang der Matrix M^{-1}.

Lösung zu Aufgabe 3

(a)
Wir berechnen

$$\Psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2\cdot 1 + (-1) - 4 \\ 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 3$ ist.
Alternativ kann man auch zuerst alle Eigenwerte bestimmen (siehe die weiteren Aufgabenteile) und zu jedem Eigenwert den dezugehörigen Eigenraum und dann feststellen, dass der hier gegebene Vektor im Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 3$ liegt.
(b)
Wir bestimmen zuerst die Darstellungsmatrix $A := \mathrm{M}_{\mathsf{E},\mathsf{E}}(\Psi)$ von Ψ bezüglich der Standardbasis:

$$\Psi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 0x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$A = \mathrm{M}_{\mathsf{E},\mathsf{E}}(\Psi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man diese Matrix auch nach dem bewährten Motto „In den Spalten der Matrix stehen die Bilder der Basisvektoren“ aufstellen.
Alternativ darf man die Matrix auch einfach sehen und direkt ohne Rechnung hinschreiben.

Nun, wo wir die Matrix A haben, berechnen wir das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} p_\Psi = p_A &= \det(X\mathbb{1}_3 - A) \\ &= \det\begin{pmatrix} X+1 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & 1 \\ 0 & 0 & X-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entwickeln nach der untersten Zeile ergibt:

$$\begin{aligned} p_\Psi &= (X-3)\det\begin{pmatrix} X+1 & 0 \\ -2 & X-1 \end{pmatrix} \\ &= (X-3)(X+1)(X-1)\,. \end{aligned}$$

Die Matrix A und somit auch der Endomorphismus Ψ haben also die Eigenwerte 3, -1 und 1. Da alle drei Eigenwerte jeweils algebraische Vielfachheit 1 haben, haben sie auch geometrische Vielfachheit 1 und alle Eigenräume sind 1-dimensional.
Also wissen wir aus Aufgabenteil (a), dass

$$E_3\left(\Psi\right) = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)\,.$$

Es bleiben, die Eigenräume $E_1\left(\Psi\right)$ und $E_{-1}\left(\Psi\right)$ zu bestimmen.

$$\begin{aligned} E_1\left(\Psi\right) &= \ker\left(1\cdot\mathbb{1}_3 - A\right) \\ &= \ker\begin{pmatrix} 1+1 & 0 & -1 \\ -2 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \\ &= \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hier kann man einen (kurzen) Gauß-Algorithmus durchführen **oder** man sieht, dass in der 2.Spalte der Nullvektor steht. Da in den Spalten der Matrix die Bilder der Basisvektoren stehen, heißt das, dass der 2. Standardbasisvektor auf 0 abgebildet wird, also gilt

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1\left(\Psi\right)\,.$$

Weil der Eigenraum 1-dimensional ist, wissen wir somit

$$E_1\left(\Psi\right) = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\,.$$

Bleibt der Eigenraum $E_{-1}(\Psi)$:

$$\begin{aligned}
E_{-1}(\Psi) &= \ker\left((-1)\mathbb{1}_3 - A\right) \\
&= \ker\begin{pmatrix} (-1)+1 & 0 & -1 \\ -2 & (-1)-1 & 1 \\ 0 & 0 & (-1)-3 \end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Hier kann man wieder einen (kurzen) Gauß-Algorithmus durchführen **oder** man sieht, wie man den Nullvektor als Linearkombination der ersten beiden Spalten schreiben kann, nämlich so:

$$1\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Eigenraum. Und weil der Eigenraum 1-dimensional ist, gilt:

$$E_{-1}(\Psi) = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(c)
Wir haben in Aufgabenteil (b) bereits alle Eigenräume bestimmt. Somit ist das folgende eine geordnete Basis aus Eigenvektoren:

$$\mathsf{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Alternativ können diese drei Vektoren beliebig vertauscht und auch skaliert werden.
Da die Basis aus Eigenvektoren besteht, ist die dazugehörige Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{B}}(\Psi)$ in Diagonalform:

$$M = \mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{B}}(\Psi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wichtig: Die Reihenfolge der Eigenwerte muss der Reihenfolge der Eigenvektoren in B entsprechen. Das Angeben der Basiswechselmatrizen ist nicht erforderlich.
(d)
Da M in Diagonalform ist, kann man die gewünschten Werte direkt ablesen:

$$\begin{aligned}
\det M &= 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -3\,. \\
\mathrm{tr} M &= 3 + 1 + (-1) = 3\,. \\
\mathrm{rg} M &= 3,.
\end{aligned}$$

Hier sind keine weiteren Rechnungen erforderlich.
Alternativ kann man diese Werte auch an der Matrix zur Standardbasis berechnen, weil dies alles Ähnlichkeitsinvarianten sind, aber das macht – wenn man M schon bestimmt hat – natürlich nicht viel Sinn.

(e)
Da M eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge alle nicht 0 sind, ist M invertierbar und die Inverse lautet:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Somit können wir auch hier direkt ablesen:

$$\begin{aligned} \det(M^{-1}) &= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (-1) = -\frac{1}{3} . \\ \operatorname{tr}(M^{-1}) &= \frac{1}{3} + 1 + (-1) = \frac{1}{3} . \\ \operatorname{rg}(M^{-1}) &= 3, . \end{aligned}$$

Alternativ kann man natürlich auch gleich $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det M} = -\frac{1}{3}$ schreiben.

Aufgabe 4 *(8 Punkte)*

Gegeben seien der $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V := \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(p) \leq 4\}$$

und die folgenden vier Polynome $p_1, p_2, p_3, p_4 \in V$:

$$\begin{aligned} p_1 &= (X-1)^2 \\ p_2 &= 2X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 3 \\ p_3 &= X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \\ p_4 &= X^4 + X^3 + 3X\,. \end{aligned}$$

Gegeben sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^4 \to V, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4\,.$$

(a) Geben Sie eine geordnete Basis B von V an und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{E}}(\psi)$ bzgl. der Standardbasis E im Definitionsbereich und der Basis B im Zielbereich.

(b) Geben Sie eine Basis für den Kern von ψ an. Geben Sie außerdem den Rang von ψ an.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Quotientenraumes $\mathbb{R}^4/(\ker\psi)$.

Lösung zu Aufgabe 4

(a)
Als Basis für den Raum aller Polynome mit Höchstgrad 4 bietet sich an

$$\mathsf{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)\,.$$

Dass dies wirklich eine Basis ist, muss nicht weiter begründet werden.
Alternativ kann man natürlich auch die Monome in einer anderen Reihenfolge angeben:

$$(X^4, X^3, X^2, X, 1)\,.$$

Das ist natürlich genauso in Ordnung, man muss nur genau schauen, dass in allen weiteren Rechnungen die Komponenten der entsprechenden Vektoren in einer anderen Reihenfolge sind. Theoretisch könnte man natürlich auch noch ganz andere Basen für V angeben, ich vermute aber einmal, dass das nicht so oft vorkommt.
In den Spalten der Matrix $\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{E}}(\psi)$ stehen die Bilder der Standardbasisvektoren, dargestellt

zur Basis $\mathsf{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$. Das ergibt also

$$(\psi(e_1))_{\mathsf{B}} = (p_1)_{\mathsf{B}} = ((X-1)^2)_{\mathsf{B}} = (1 - 2X + X^2)_{\mathsf{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\psi(e_2))_{\mathsf{B}} = (p_2)_{\mathsf{B}} = (2X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 3)_{\mathsf{B}} = (3 + 3X^2 + 2X^3 + 2X^4)_{\mathsf{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(\psi(e_3))_{\mathsf{B}} = (p_3)_{\mathsf{B}} = (X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)_{\mathsf{B}} = (1 + X + X^2 + X^3 + X^4)_{\mathsf{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(\psi(e_4))_{\mathsf{B}} = (p_4)_{\mathsf{B}} = (X^4 + X^3 + 3X)_{\mathsf{B}} = (3X + X^3 + X^4)_{\mathsf{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also gilt:

$$\mathrm{M}_{\mathsf{B},\mathsf{E}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)
Da wir die Darstellungsmatrix von ψ bereits kennen, können wir nun direkt den Gauß-Algorithmus verwenden:

x_1	x_2	x_3	x_4		
1	3	1	0	0	|das 2-fache auf die zweite Zeile addieren
-2	0	1	3	0	
1	3	1	0	0	
0	2	1	1	0	
0	2	1	1	0	
1	3	1	0	0	|das (-1)-fache auf die dritte Zeile addieren
0	6	3	3	0	
1	3	1	0	0	
0	2	1	1	0	
0	2	1	1	0	
1	3	1	0	0	
0	6	3	3	0	|diese Zeile mit $\frac{1}{3}$ multiplizieren
0	0	0	0	0	
0	2	1	1	0	
0	2	1	1	0	
1	3	1	0	0	
0	2	1	1	0	|das (-1)-fache auf die vierte und fünfte Zeile addieren
0	0	0	0	0	
0	2	1	1	0	
0	2	1	1	0	
1	3	1	0	0	
0	2	1	1	0	|diese Zeile mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
1	3	1	0	0	
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	|das (-3)-fache auf die erste Zeile addieren
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	|das (-3)-fache auf die erste Zeile addieren
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	

Wir können $x_3 = s$ und $x_4 = t$ frei wählen und erhalten somit als allgemeinen Lösungsvektor:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{2} + 3\frac{t}{2} \\ -\frac{s}{2} - \frac{t}{2} \\ s \\ t \end{pmatrix} = \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{s}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wir haben somit

$$\ker \psi = \mathrm{LH} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\mathsf{C} := \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ist eine Basis für den Kern.

Alternativ kann man aber hier im Gauß-Algorithmus natürlich einiges anders machen und man kann natürlich auch eine andere Basis herausbekommen. Auch der (-1)-Trick ist erlaubt, sofern man weiß, was man tut. Auch ein mehr oder weniger direktes Ablesen und Hinschreiben des Kerns, wenn die Matrix in Zeilenstufenform ist, ist zulässig.

Den Rang von ψ kann man entweder an der Matrix in Zeilenstufenform ablesen oder man verwendet die Dimensionsformel:

$$\mathrm{rg}\Psi = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker \psi = 4 - 2 = 2\,.$$

(c)

Die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

lassen sich zu einer Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^4$ ergänzen. Das geht z.B. so:

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Dass diese vier Vektoren linear unabhängig sind, sieht man z.B. daran, dass die Anzahl der Nullen am Ende unterschiedlich sind.

Somit bilden die beiden hinzugefügten Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis für ein Vektorraumkomplement von $\ker \psi$ in $\mathbb{R}^4$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die dazugehörigen Äquivalenzklassen also eine Basis des Quotientenraumes bilden:

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right).$$

Wichtig: Die Elemente dieser Basis müssen Äquivalentklassen von Spaltenvektoren sein, sonst stimmt der Typ nicht. Nicht zulässig ist also, einfach nur Spaltenvektoren ohne eckigen Klammern herum zu schreiben.

Anmerkung: Der *Homomorphiesatz* aus der Vorlesung (Korollar 4.5.7) sagt uns, dass $\mathbb{R}^4/\ker\psi$ isomorph ist zu Bild(ψ), es haben also diese beiden Vektorräume die gleiche Dimension (nämlich 2 in diesem Fall). Trotzdem ist es keine zulässige Lösung, eine Basis von Bild(ψ) anzugeben, da dies keine Basis von $\mathbb{R}^4/\ker\psi$ ist. Man kann natürlich eine Basis des Bildes hernehmen und dann über den Isomorphismus, den uns der Homomorphiesatz liefert zurückziehen, um eine Basis von $\mathbb{R}^4/\ker\psi$ zu erhalten.

Aufgabe 5 *(8 Punkte)*

Für jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$A_t := \begin{pmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) Berechnen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Determinante von A_t.

(b) Zeigen Sie: Die Menge $G := \{A_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

(c) Zeigen Sie: Die Gruppe G ist isomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +)$.

Lösung zu Aufgabe 5

(a)
Wir berechnen:

$$\det A_t = \det \begin{pmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix} = (1+2t)(1-2t) - (-t)4t = 1 - 4t^2 + 4t^2 = 1.$$

(b)
Wir haben in Teil (a) gesehen, dass jedes A_t Determinante ungleich 0 hat und somit invertierbar ist. Also ist die Menge G eine Teilmenge der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathbb{1}_2 \in G$ liegt, dass G unter Multiplikation abgeschlossen ist und dass für jedes A_t auch das Inverse in G liegt.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1+2\cdot 0 & 4\cdot 0 \\ -0 & 1-2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2.$$

Zeigen wir nun, dass G unter Multiplikation abgeschlossen ist: Es seien $A_s, A_t \in G$ gegeben, wobei $s, t \in \mathbb{R}$ sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A_s A_t &= \begin{pmatrix} 1+2s & 4s \\ -s & 1-2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+2s)(1+2t) - 4st & (1+2s)4t + 4s(1-2t) \\ (-s)(1+2t) + (1-2s)(-t) & (-s)4t + (1-2s)(1-2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2s+2t+4st-4st & 4t+8st+4s-8st \\ -s-2st-t+2st & -4st+1-2s-2t+4st \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2(s+t) & 4(s+t) \\ -(s+t) & 1-2(s+t) \end{pmatrix} = A_{s+t}. \end{aligned}$$

Es bleibt, die Abgeschlossenheit unter Inversion zu zeigen: Wir verwenden die Formel für Inverse einer (2×2)-Matrix – und, dass die Determinante 1 ist (nach Aufgabenteil (a)):

$$\begin{aligned} (A_t)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1-2t & -4t \\ -t & 1+2t \end{pmatrix} = A_{-t}. \end{aligned}$$

Also ist G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
Alternativ kann man auch andere äquivalente Untergruppenkriterien verwenden, z.B. $G \neq \emptyset$ und $gh^{-1} \in G$ für alle $g \in G$.

Alternativ kann man auch (b) und (c) zusammen lösen, indem man direkt die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}\,(2, \mathbb{R})\,, \quad t \mapsto A_t$$

definiert und zeigt, dass $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$ ist. Dann ist φ ein Gruppenhomomorphismus und somit ist G als Bild eines Gruppenhomomorphismus eine Untergruppe. Wenn man dann noch zeigt, dass der Kern von φ trivial ist, ist damit (b) und (c) gelöst. Man muss aber trotzdem erst zeigen, dass jedes A_t invertierbar ist, weil sonst die Abbildung φ nicht sinnvoll definiert ist.
(c)
Wir definieren die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}\,(2, \mathbb{R})\,, \quad t \mapsto A_t$$

und zeigen, dass das ein Gruppenhomomorphismus ist.

$$\begin{aligned}
\varphi(s)\varphi(t) = A_s A_t &= \begin{pmatrix} 1+2s & 4s \\ -s & 1-2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1+2s)(1+2t) - 4st & (1+2s)4t + 4s(1-2t) \\ (-s)(1+2t) + (1-2s)(-t) & (-s)4t + (1-2s)(1-2t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+2s+2t+4st-4st & 4t+8st+4s-8st \\ -s-2st-t+2st & -4st+1-2s-2t+4st \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+2(s+t) & 4(s+t) \\ -(s+t) & 1-2(s+t) \end{pmatrix} = A_{s+t} = \varphi(s+t)\,.
\end{aligned}$$

Wenn man $A_s A_t = A_{s+t}$ in Aufgabenteil (b) bereits nachgerechnet hat, muss man diese Rechnung natürlich nicht wiederholen, sondern kann darauf verweisen.
Als nächstes zeigen wir, dass φ injektiv ist. Sei dazu $t \in \ker \varphi$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& t \in \ker \varphi \\
\implies & \varphi(t) = \mathbb{1}_2 \\
\implies & \begin{pmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}$$

Da zwei Matrizen gleich sind, wenn alle Einträge gleich sind, gilt hiermit insbesondere $4t = 0$ und somit $t = 0$.
Also ist $\ker \varphi$ trivial und φ ist injektiv.
Demnach ist φ ein Isomorphismus, wenn man ihn koeinschränkt auf das Bild, es gilt also:

$$(\mathbb{R}, +) \cong \mathrm{Bild}\,\varphi = G\,.$$

Alternativ kann man natürlich φ auch gleich so definieren, dass der Zielbereich die Gruppe G ist – wenn man in (b) gezeigt hat, dass G eine Gruppe ist, ansonsten ergibt der Gruppenhomomorphismusbegriff keinen Sinn.
Alternativ kann man die Abbildung auch so definieren, dass der Definitionsbereich G und der Zielbereich $\mathbb{R}$ ist, also:

$$\psi : G \to \mathbb{R}, \quad A_t \mapsto t\,.$$

Hier muss man dann allerdings zeigen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist, d.h. dass der Wert t nicht von der Darstellung des Gruppenelements als A_t abhängt. (Das entspricht der Injektivität der Abbildung ϕ im anderen Ansatz.

Aufgabe 6 *(8 Punkte)*

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und

$$\mathsf{E} = (e_1, \ldots, e_n)$$

die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.
Weiter sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit

$$\begin{aligned} \varphi(e_j) &= e_{j+1} \qquad \text{für } j < n\,, \\ \varphi(e_n) &= e_1\,. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie im Spezialfall $n = 5$ die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathsf{E},\mathsf{E}}(\varphi) \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ explizit an.

(b) Zeigen Sie (für allgemeines $n \in \mathbb{N}$): Das charakteristische Polynom von φ ist gegeben durch

$$p_\varphi = X^n - 1\,.$$

(c) Zeigen Sie: φ ist über $\mathbb{R}$ genau dann diagonalisierbar, wenn $n \leq 2$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 6

(a)
Wir haben $\varphi(e_1) = e_2$; $\varphi(e_2) = e_3$; $\varphi(e_3) = e_4$; $\varphi(e_4) = e_5$ und $\varphi(e_5) = e_1$. In den Spalten der Matrix stehen die Bilder der Basisvektoren, also gilt:

$$\mathrm{M}_{\mathsf{E},\mathsf{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b)
Für $n = 1$ gilt: $\varphi(e_1) = e_1$ und somit ist

$$\mathrm{M}_{\mathsf{E},\mathsf{E}}(\varphi) = \mathbb{1}_1 = 1.$$

Folglich ist

$$p_\varphi = \det(X \cdot 1 - 1) = X - 1\,.$$

Für allgemeines $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$ gilt:

$$A := \mathrm{M}_{\mathsf{E},\mathsf{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet entsprechend:

$$p_\varphi = p_A = \det(X\mathbb{1}_n - A) = \det \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & X \end{pmatrix}.$$

Diese Determinante berechnen wir nun mit Laplace-Entwicklung (Achtung: Dieser Schritt ist nur erlaubt, wenn $n \geq 2$ ist, da Laplace-Entwicklung nur für Matrizen mit $n \geq 2$ eingeführt wurde) nach der ersten Zeile:

$$p_\varphi = X \det \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & X & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & X \end{pmatrix} + (-1)^{1+n}(-1) \det \begin{pmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & X & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} .$$

Die erste der beiden Matrizen ist eine untere Dreiecksmatrix, die zwei eine obere Dreiecksmatrix. Für solche Matrizen ist bekannt, dass die Determinante einfach das Produkt der Diagonaleinträge ist. Somit ergibt sich:

$$p_\varphi = X \cdot X^{n-1} + (-1)^{1+n}(-1) \cdot (-1)^{n-1} = X^n - 1 .$$

Alternativ kann man auch Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte verwenden. Dann ist aber eine der beiden neuen Determinanten noch in Dreiecksform und man muss entweder noch Zeilenumformungen machen oder nochmals Laplace-entwickeln.

Achtung: Das charakteristische Polynom wurde in der Vorlesung, auf die sich diese Klausur bezieht (und in der Vorlesung von Stefan Kühnlein letztes Jahr) definiert als $\det(X\mathbb{1}_n - A)$ und hat somit immer den Koeffizienten 1 vor X^n. Es existiert auch eine andere Konvention, die wir nicht verwendet haben, wonach man das charakteristische Polynom definiert als $\det(A - X\mathbb{1}_n)$. Dies ist für gerade n genau das gleich und für ungerade n hat man einfach noch den Faktor (-1) davor.

Wenn man diese Konvention verwendet, erhält man *nicht* $X^n - 1$, sondern $(-1)^n(X^n - 1)$. Wenn man dies korrekt rechnet und dann das Ergbnis $(-1)^n(X^n - 1)$ erhält und darauf hinweist, dass dies bis auf einen Vorfaktor das richtige Ergebnis ist, ist das völlig in Ordnung. Nicht in Ordnung ist es, in der Rechnung, sobald man merkt, dass etwas falsches herauskommen könnte, absichtlich einen Vorzeichenfehler einzubauen, um dann auf $X^n - 1$ zu kommen.

(c)

Eine (1×1)-Matrix ist einfach eine Zahl und somit immer in Diagonalform. Hier ist also nichts zu zeigen.

Für $n = 2$ zerfällt das charakteristische Polynom $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren. Somit haben wir eine (2×2)-Matrix mit 2 verschiedenen Eigenwerten. Damit ist die Matrix diagonalisierbar.

Es sei nun $n \geq 3$. Es bleibt zu zeigen, dass die Matrix über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar ist.

Hier gibt es (mindestens) zwei Lösungswege, die zum Ziel führen:

Lösung ohne komplexe Zahlen:

Es sei λ ein Eigenwert der Abbildung ϕ, also ein Eigenwert der Matrix $A = \mathrm{M}_{\mathsf{E},\mathsf{E}}(\phi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist die geometrische Vielfachheit von λ gegeben als

$$\dim E_\lambda(A) = \dim \ker(\lambda\mathbb{1}_n - A) .$$

Nach Dimensionsformel kann man diese Zahl berechnen als

$$\dim E_\lambda(A) = \dim \ker(\lambda\mathbb{1}_n - A) = n - \operatorname{rg}(\lambda\mathbb{1}_n - A) .$$

Wenn wir uns die ersten $(n-1)$ Spalten der Matrix $\lambda\mathbb{1}_n - A$ ansehen, sehen wir, dass diese linear unabhängig sind. Folglich ist der Rang von $(\lambda\mathbb{1}_n - A)$ mindestens $(n-1)$, also ist die geometrische Vielfachheit von λ höchstens 1.

Nun hat das Polynom $X^n - 1$ über den reellen Zahlen höchstens zwei Nullstellen (nämlich 1 und (-1)), das heißt unsere Matrix hat höchstens zwei reelle Eigenwerte und jeder davon hat höchstens geometrische Vielfachheit 1. Also kann die Summe der geometrischen Vielfachheiten höchstens 2 sein. Da wir angenommen haben, dass $n \geq 3$ ist, folgt, dass die Summe der geometrischen Vielfachheiten nicht n ist. Genau das ist aber eine äquivalente Charakterisierung für Diagonalisierbarkeit aus der Vorlesung. Also ist A (und damit ϕ) nicht diagonalisierbar!

Alternative Lösung mit komplexe Zahlen:

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass es in $\mathbb{C}$ genau n verschiedene n-te Einheitswurzeln gibt, d.h. die Gleichung

$$z^n = 1$$

hat genau n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$.

Anders ausgedrückt: Das Polynom $X^n - 1$ hat n verschiedene komplexe Nullstellen. Wir können jede einzelne davon als Linearfaktor ausklammern und erhalten die Darstellung

$$X^n - 1 = (X - \alpha_0) \cdot (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_{n-1})\,.$$

wobei die $(\alpha_k)_k$ paarweise verschieden sind. (Es gilt für jedes k, dass sich α_k als $\alpha_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ schreiben lässt und dass diese n Zahlen auf den Ecken eines regelmäßigen n-Ecks in der komplexen Zahlenebene liegen, aber das ist für das Argument unerheblich.)

Wir sehen also: Die Matrix hat n verschiedene Eigenwerte, über $\mathbb{C}$ ist die Matrix also diagonalisierbar.

Es gilt somit, dass die Matrix genau dann über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist, wenn alle diese n Nullstellen auch in $\mathbb{R}$ liegen.

Für $n \geq 3$ hat die Gleichung $x^n = 1$ aber immer nur höchstens zwei reelle Nullstellen, da aus $x^n = 1$ immer $|x| = 1$ und somit $x = \pm 1$ gilt.