

Aufgabe 1 (*)

(8 Punkte)

Bestimmen Sie die Inversen der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3 \times 3}, \quad \begin{pmatrix} 1-i & 0 & i \\ 2 & 3-i & 2+2i \\ 1+i & 4-i & 2+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Aufgabe 2

Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das Kreuzprodukt durch

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen

$$\phi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto x \times e_1 \quad \phi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto x \times e_2 \quad \phi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto x \times e_3$$

bezüglich der Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$.

Aufgabe 3 (*)

(8 Punkte)

Es sei $B = (\cos \sin, \sin^2, \cos^2)$ und $V = \text{LH}(B) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$d : V \rightarrow V, f \mapsto f'$$

des $\mathbb{R}$ -Vektorraums V , wobei f' die erste Ableitung von f sei.

- Zeigen Sie durch geschicktes Einsetzen reeller Zahlen, dass B eine Basis von V ist.
- Bestimmen Sie $M_{B,B}(d)$.
- Bestimmen Sie Bild und Kern von d .

Aufgabe 4

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

a) Bestimmen Sie eine geordnete Basis $\mathbf{B}$ von $\text{Sym}_2(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{2 \times 2} \mid A^T = A\}$.

Für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$\Phi_\lambda : \text{Sym}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^2, A \mapsto A \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi_\mu : \text{Sym}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^2, A \mapsto A \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\mathbf{E} = (e_1, e_2)$ die geordnete Standardbasis von $\mathbb{K}^2$.

b) Bestimmen Sie $M_{\mathbf{E}, \mathbf{B}}(\Phi_\lambda + \Psi_\mu)$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Abgabe: Die Abgabe für dieses Blatt erfolgt

- (i) entweder bis Freitag, 19.01.2024, um 12:00 Uhr im physischen Abgabekasten ihres Tutors
- (ii) oder am Montag, 22.01.2024, direkt vor der Übung beim Übungsleiter
- (iii) oder bis Montag, 22.01.2024, um 8:00 Uhr bei Ihrem Tutor per E-Mail (oder per digitalem Abgabekasten in der ILIAS-Gruppe ihres Tutoriums, falls ihr Tutor einen eingerichtet hat).