

Aufgabe 1

Es sei V ein Vektorraum und $\Phi : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die folgende Aussage: Gilt $\Phi \circ \Phi(x) = \Phi(x)$ für alle $x \in V$, so folgt $V = \ker(\Phi) \oplus \text{Bild}(\Phi)$.

Einen linearen Endomorphismus Φ für den $\Phi^2 = \Phi$ gilt, nennt man auch Projektion.

Aufgabe 2 (*)

(8 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$. Sei $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung mit

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Gegeben seien außerdem die Vektoren

$$c_1 = b_1 + b_3, \quad c_2 = -b_2 + b_3 \quad \text{und} \quad c_3 = b_1 + b_2 + b_3.$$

- a) Zeigen Sie, dass $C = (c_1, c_2, c_3)$ eine Basis von V ist und berechnen Sie $M_{CC}(f)$.
- b) Bestimmen Sie $(M_{CC}(f))^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$
- c) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Was ist $(M_{BB}(f))^k$?

Aufgabe 3 (*)

(8 Punkte)

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2 \times 5}.$$

- a) Finden Sie eine Basis für ein Vektorraumkomplement von $\ker(A)$ in $\mathbb{F}_2^5$.
- b) Geben Sie eine Basis für $\mathbb{F}_2^5 / \ker(A)$ an.

Aufgabe 4

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{K}^m$, $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ und $\varphi : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ linear mit

- $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{K}^m$ und $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{K}^n$,
- $\varphi(V_1) \subseteq W_1$ und $\varphi(V_2) \subseteq W_2$.

Zeigen Sie, dass dann geordnete Basen $\mathbf{B}$ von $\mathbb{K}^m$ und $\mathbf{C}$ von $\mathbb{K}^n$ existieren, sodass

$$M_{\mathbf{C}, \mathbf{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,\dim(V_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\dim(W_1),1} & \cdots & a_{\dim(W_1),\dim(V_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,\dim(V_2)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{\dim(W_2),1} & \cdots & b_{\dim(W_2),\dim(V_2)} \end{pmatrix}$$

mit $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\dim(W_1) \times \dim(V_1)}$ und $(b_{lk}) \in \mathbb{K}^{\dim(W_2) \times \dim(V_2)}$.

Abgabe: Die Abgabe für dieses Blatt erfolgt

- (i) entweder bis Freitag, 26.01.2024, um 12:00 Uhr im physischen Abgabekasten ihres Tutors
- (ii) oder am Montag, 29.01.2024, direkt vor der Übung beim Übungsleiter
- (iii) oder bis Montag, 29.01.2024, um 8:00 Uhr bei Ihrem Tutor per E-Mail (oder per digitalem Abgabekasten in der ILIAS-Gruppe ihres Tutoriums, falls ihr Tutor einen eingerichtet hat).