Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 1 **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 12 **29.01.2024**

Aufgabe 1 (*) *(8 Punkte)*

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass jede Algebra isomorph zu einer Unteralgebra von $\mathrm{End}(V)$ eines geeigneten Vektorraums V ist.
Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und A eine $\mathbb{K}$-Algebra. Für $a \in A$ definieren wir $f_a : A \to A, x \mapsto ax$.
Zeigen Sie, dass

$$\Phi : A \mapsto \mathrm{End}_{\mathbb{K}-\mathrm{VR}}(A), a \mapsto f_a$$

eine injektiver $\mathbb{K}$-Algebrenhomomorphismus ist. (*Hier bezeichnet* $\mathrm{End}_{\mathbb{K}-VR}(A)$ *die Menge der Vektorraumendomorphismen von* A.)

Aufgabe 2 (*) *(8 Punkte)*

Es sei $\mathbb{K}$ eine Körper und A eine endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Algebra.

a) Es sei $a \in A$. Zeigen Sie, dass der Auswertungshomomorphismus an der Stelle a nicht injektiv sein kann und folgern Sie, dass es ein Polynom $f \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ gibt, sodass $f(a) = 0$.

b) Es sei $a \in A^\times$. Folgern Sie aus der vorherigen Teilaufgabe, dass a^{-1} eine $\mathbb{K}$-Linearkombination von Potenzen von a ist.

Aufgabe 3

Es bezeichne V den reellen Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ und $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge aus d Elementen. Weiter seien

$$U_1 := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{ für alle } m \in M : f(m) = 0\},\ U_2 := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq d-1\}$$

zwei Untervektorräume von V und $\varphi : V \to \mathbb{R}^M$ die durch $\varphi(f)(m) := f(m)$ gegebene lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass $\varphi|_{U_2} : U_2 \to \mathbb{R}^M$ ein Isomorphismus ist. (*Der Beweis von 5.4.13 könnte hilfreich sein.*)

b) Folgern Sie mit dem Homomorphiesatz, dass auch gilt: $V/U_1 \cong \mathbb{R}^M$.

c) Folgern Sie, dass U_2 ein Komplement von U_1 ist.

Aufgabe 4

Es sei A eine $\mathbb{K}$-Algebra. Für $x, y \in A$ definieren wir $[x, y] \coloneqq xy - yx$. Zeigen Sie, dass $[\cdot, \cdot] : A \times A \to A$ eine alternierende Abbildung ist und die sogenannte Jacobi-Identität

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

erfüllt.

Abgabe: Die Abgabe für dieses Blatt erfolgt

(i) entweder bis Freitag, 02.02.2024, um 12:00 Uhr im physischen Abgabekasten ihres Tutors

(ii) oder am Montag, 05.02.2024, direkt vor der Übung beim Übungsleiter

(iii) oder bis Montag, 05.02.2024, um 8:00 Uhr bei Ihrem Tutor per E-Mail (oder per digitalem Abgabekasten in der ILIAS-Gruppe ihres Tutoriums, falls ihr Tutor einen eingerichtet hat).