

Das aktuelle Blatt zählt nicht mehr zu den Blättern für den Erhalt des Übungsscheins. Wir empfehlen natürlich dennoch, dass Sie es bearbeiten.

Aufgabe 1

Die Fibonacci-Zahlen sind durch

$$f_0 := 1, f_1 := 1 \text{ und } f_n := f_0 + f_1, \quad \text{für } n \geq 2$$

induktiv definiert. Es sei

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ i & 1 & i & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & i & 1 & i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Zeigen Sie, dass $\det(F_n) = f_n$ für alle $n \geq 1$.

Aufgabe 2 (Besonders empfohlen)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und dazugehörigen Eigenräume von

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -3 & -12 \\ -1 & 10 & 24 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}.$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) := \{(a_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Q}) \mid \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : a_{i,j} \in \mathbb{Z}\}$$

mit Matrizenmultiplikation als Verknüpfung eine Gruppe ist. (Die Cramersche Regel könnte hilfreich sein.)

Aufgabe 4

- a) Es sei \mathbb{K} ein Körper, $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$. Zeigen Sie: Ist v ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist Av ein Eigenvektor von ABA^{-1} zum Eigenwert λ .
- b) Folgern Sie, dass dann $\dim E_\lambda(B) = \dim E_\lambda(ABA^{-1})$.
- c) Finden Sie zwei Matrizen in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit gleichem Rang und gleichem charakteristischem Polynom, die nicht ähnlich sind. (*Hinweis: Modifizieren Sie eine der einfachsten Matrizen die Sie kennen.*)

Abgabe: Die Abgabe für dieses Blatt erfolgt

- (i) entweder bis Freitag, 09.02.2024, um 12:00 Uhr im physischen Abgabekasten ihres Tutors
- (ii) oder am Montag, 12.02.2024, direkt vor der Übung beim Übungsleiter
- (iii) oder bis Montag, 12.02.2024, um 8:00 Uhr bei Ihrem Tutor per E-Mail (oder per digitalem Abgabekasten in der ILIAS-Gruppe ihres Tutoriums, falls ihr Tutor einen eingerichtet hat).