Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 1 **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 14 **12.02.2024**

Das aktuelle Blatt zählt nicht mehr zu den Blättern für den Erhalt des Übungsscheins. Wir empfehlen natürlich dennoch, dass Sie es bearbeiten.

Aufgabe 1 (*Ausführliches Diagonalisieren*)

Es sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie Basen aller Eigenräume von A.

b) Bestimmen Sie eine geordnete Basis $\mathsf{B} = (b_1, \dots, b_4)$ von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A und bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $S = M_{\mathsf{E},\mathsf{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$.

c) Rechnen Sie nach, dass $AS = SD$ gilt, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ ist. Dabei sei λ_i jeweils der Eigenwert zum Eigenvektor b_i für $i = 1, \dots, 4$.

Aufgabe 2

Wir betrachten den Untervektorraum $U := \mathrm{LH}(\sin, \cos) \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

a) Zeigen Sie, dass $d : U \to U, f \mapsto f'$ diagonalisierbar ist. (*Sie dürfen verwenden, dass* $(\sin, \cos)$ *eine Basis von* U *ist.*)

b) Bestimmen Sie eine Basis B aus Eigenvektoren von d.

c) Geben Sie $M_{\mathsf{B},\mathsf{B}}(d)$ an.

Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $p \in \mathbb{K}[X]$, $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

a) Sind A und B zueinander ähnlich, so sind $p(A)$ und $p(B)$ zueinander ähnlich.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$.

c) Bestimmen Sie die (reellen) Eigenwerte von

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und von $p(A)$, mit $p(X) = X^2$. Was fällt auf?

Aufgabe 4

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis (b_1, b_2, b_3) und $\omega : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ sei eine alternierende Abbildung. Wir definieren

$$c_1 \coloneqq b_1 + b_3, \quad c_2 \coloneqq b_2 + b_3, \quad c_3 \coloneqq b_1 + b_2 + b_3.$$

Was ist $\omega(c_1, c_2, c_3)$, wenn $\omega(b_1, b_2, b_3) = 42$?

Abgabe: Für diese Blatt gibt es keine Abgabe.