Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 1 — **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 2 — **06.11.2023**

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass folgende Abbildung bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrabbildung an:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ k &\mapsto \begin{cases} 2k, & \text{falls } k \text{ gerade ist.} \\ k-1, & \text{falls } k+1 \text{ durch 4 teilbar ist.} \\ \frac{k+1}{2}, & \text{falls } k-1 \text{ durch 4 teilbar ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

Hinweis: Wir sagen, dass $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar ist, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n = 4k$. Ist k durch 4 teilbar, so sind $k-2$ und $k+2$ nicht durch 4 teilbar

Aufgabe 2 (*) *(8 Punkte)*

Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ definieren wir die Spur von A durch

$$\operatorname{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{k} a_{ii}.$$

Nun seien $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Spur}(BC) = \operatorname{Spur}(CB).$$

Aufgabe 3 (*) *(8 Punkte)*

Wir nennen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ idempotent, wenn $A^2 = A$.

a) Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Matrix uv^T idempotent ist, wenn $v^T u = 1$.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$$

idempotent ist.

Aufgabe 4

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^2$. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = y$$

Zeigen Sie, dass dieses Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt, wenn $ad - bc \neq 0$. (*Tatsächlich ist das LGS genau dann eindeutig lösbar, wenn $ad - bc \neq 0$, aber der Beweis ist etwas zu lange für das Übungsblatt.*)

Abgabe: Die Abgabe für dieses Blatt erfolgt

(i) entweder bis Freitag, 10.11.2023, um 12:00 Uhr im Abgabekasten ihres Tutors

(ii) oder am Montag, 13.11.2023, direkt vor der Übung beim Übungsleiter

(iii) oder bis Montag, 13.11.2023, um 8:00 Uhr bei Ihrem Tutor per E-Mail (oder per Abgabekasten in der ILIAS-Gruppe ihres Tutoriums, falls ihr Tutor einen eingerichtet hat).