Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 1 — **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 5 — **27.11.2023**

Aufgabe 1 (*) *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie die Lösungsräume der linearen Gleichungssysteme

(i)
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (*) *(8 Punkte)*

Es seien $R, S \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei affine Unterräume. Wir definieren die Summe

$$R + S := \{r + s \mid r \in R, s \in S\}.$$

Zeigen Sie:

a) $R + S$ ist ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

b) Die Menge
$$\mathcal{A} := \{R \subseteq \mathbb{R}^n \mid R \text{ ist ein affiner Unterraum}\}$$
mit der Verknüpfung $+$ bildet ein Monoid mit neutralem Element $\{0\}$.

c) Es gilt
$$\dim(R) + \dim(S) \geq \dim(R + S) \geq \max\{\dim(R), \dim(S)\}.$$

d) Die Menge der in $\mathcal{A}$ invertierbaren Elemente ist gegeben durch
$$\mathcal{A}^\times = \{R \in \mathcal{A} \mid \dim R = 0\}.$$

Aufgabe 3

Wir definieren
$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, yz \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass H mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Aufgabe 4

a) Gegeben sei eine Halbgruppe $(S, *)$ mit mindestens zwei Elementen. Zeigen Sie, dass $* : S \times S \to S$ nicht injektiv ist.

b) Es sei $(S, *)$ ein Monoid. Zeigen Sie, dass $*$ surjektiv ist.

c) Geben sie eine Halbgruppe $(S, *)$ an, sodass $*$ nicht surjektiv ist.

Abgabe: Die Abgabe für dieses Blatt erfolgt

(i) entweder bis Freitag, 01.12.2023, um 12:00 Uhr im Abgabekasten ihres Tutors

(ii) oder am Montag, 04.11.2023, direkt vor der Übung beim Übungsleiter

(iii) oder bis Montag, 04.11.2023, um 8:00 Uhr bei Ihrem Tutor per E-Mail (oder per Abgabekasten in der ILIAS-Gruppe ihres Tutoriums, falls ihr Tutor einen eingerichtet hat).