

**Aufgabe 1** (\*)

(8 Punkte)

Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen Untergruppen von  $\mathcal{S}(5)$  sind.

- a)  $A := \{\sigma \in \mathcal{S}(5) \mid \sigma(1) = 1\}$
- b)  $B := \{\sigma \in \mathcal{S}(5) \mid \sigma(1) \in \{1, 2\}\}$
- c)  $C := \{\sigma \in \mathcal{S}(5) \mid \{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{1, 2\}\}$
- d)  $D := \{\sigma \in \mathcal{S}(5) \mid \sigma \circ \sigma = \text{id}_{\{1, \dots, 5\}}\}$

**Aufgabe 2** (\*)

(8 Punkte)

- a) Es sei  $M$  eine nichtleere Menge und  $(G, *)$  eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Menge  $G^M$  der Abbildungen von  $M$  nach  $G$  mit der Verknüpfung

$$\star : G^M \times G^M \rightarrow G^M, \quad (f, g) \mapsto (M \rightarrow G, x \mapsto f(x) * g(x))$$

eine Gruppe ist.

- b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\text{End}(G) := \{f \in G^G \mid f \text{ ist Gruppenhomomorphismus}\}$$

mit den Verknüpfungen  $+$   $:= \star$  und  $\cdot$   $:= \circ$  (der Komposition von Funktionen) ein Ring ist, sofern  $G$  kommutativ ist.

**Aufgabe 3**

- a) Es sei  $(G, *)$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  eine endliche nichtleere Teilmenge. Zeigen Sie, dass  $H$  genau dann eine Untergruppe von  $G$  ist, wenn  $H$  unter der Verknüpfung von  $G$  abgeschlossen ist.
- b) Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe  $G$  und eine nichtleere Menge  $H \subseteq G$ , die unter der Verknüpfung von  $G$  abgeschlossen ist und keine Untergruppe ist.

#### Aufgabe 4

Es sei  $R$  eine Menge mit Verknüpfungen  $+$  :  $\mathbb{R} \times R \rightarrow R$  und  $\cdot$  :  $R \times R \rightarrow R$  so, dass

- (i)  $(R, +)$  eine Gruppe ist,
- (ii)  $(R, \cdot)$  ein Monoid ist,
- (iii) und die Distributivgesetze

$$\forall x, y, z \in R : x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad \text{und} \quad \forall x, y, z \in R : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

gelten.

Folgern Sie, dass die Gruppe  $(R, +)$  kommutativ ist. (Siehe auch Bemerkung 3.3.2(d) im Skript.)

---

**Abgabe:** Die Abgabe für dieses Blatt erfolgt

- (i) entweder bis Freitag, 08.12.2023, um 12:00 Uhr im Abgabekasten ihres Tutors
- (ii) oder am Montag, 11.12.2023, direkt vor der Übung beim Übungsleiter
- (iii) oder bis Montag, 11.12.2023, um 8:00 Uhr bei Ihrem Tutor per E-Mail (oder per Abgabekasten in der ILIAS-Gruppe ihres Tutoriums, falls ihr Tutor einen eingerichtet hat).