Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 1 **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 7 **11.12.2023**

Aufgabe 1

Sind M und N Mengen, $f : M \to N$ eine Funktion, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $q : M \to M/\sim$ die Quotientenabbildung. Zeigen Sie, dass eine Funktion

$$\bar{f} : M/\sim \to N$$

mit $\bar{f} \circ q = f$ genau dann existiert, wenn

$$x \sim y \implies f(x) = f(y)$$

für alle $x, y \in M$.

Aufgabe 2 (*) *(8 Punkte)*

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass genau dann einen Ringhomomorphismus

$$\phi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

existiert, wenn m von n geteilt wird.

Aufgabe 3

Es sei $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gelte die Implikation

$$p \mid ab \implies p \mid a \text{ oder } p \mid b.$$

Zeigen Sie, dass dann p bereits eine Primzahl ist. *(Anmerkung: Das ist die Umkehrung des Lemmas von Euklid.)*

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (*) *(8 Punkte)*

Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \coloneqq \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

a) Es seien $a, b \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $a + b\sqrt{3} = 0$ genau dann, wenn $a = b = 0$. *(Hinweis: Sie dürfen annehmen oder selbst zeigen, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.)*

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist.

Wir definieren zudem die Menge

$$R \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

c) Zeigen Sie, dass R ein Unterring von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.

d) Zeigen Sie, dass die Ringe R und $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ isomorph sind.

Abgabe: Die Abgabe für dieses Blatt erfolgt

(i) entweder bis Freitag, 15.12.2023, um 12:00 Uhr im Abgabekasten ihres Tutors

(ii) oder am Montag, 18.12.2023, direkt vor der Übung beim Übungsleiter

(iii) oder bis Montag, 18.12.2023, um 8:00 Uhr bei Ihrem Tutor per E-Mail (oder per Abgabekasten in der ILIAS-Gruppe ihres Tutoriums, falls ihr Tutor einen eingerichtet hat).