

Aufgabe 1

Im Folgenden sei \mathbb{K} ein beliebiger Körper, n eine natürliche Zahl und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

- Zeigen Sie, dass $\psi_A : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, X \mapsto AX - XA$ eine lineare Abbildung ist.
- Folgern Sie, dass $C_A := \{X \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid AX = XA\}$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist.

Aufgabe 2 (*)

(8 Punkte)

Es sei M eine nichtleere Menge. Wir definieren die Verknüpfung Δ auf $\mathcal{P}(M)$ durch

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

- Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ eine abelsche Gruppe ist.
- Wir definieren $\odot : \mathbb{F}_2 \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ durch

$$0 \odot A := \emptyset, \quad 1 \odot A := A.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(M)$ mit Δ als Summe und \odot als Skalarmultiplikation ein \mathbb{F}_2 -Vektorraum ist.

(Hinweis: Für die Definition von Δ siehe Bemerkung 1.2.17 im Skript. Sie dürfen annehmen, dass Δ assoziativ ist.)

Aufgabe 3 (*)

(8 Punkte)

Wir definieren auf $V := (0, \infty)$ die Operation $\oplus : V \times V \rightarrow V$ durch

$$x \oplus y := xy$$

und die Operation

$$\odot : \mathbb{Q} \times V \rightarrow V, (\lambda, x) \mapsto x^\lambda.$$

Zeigen Sie, dass V mit \oplus und \odot ein \mathbb{Q} -Vektorraum ist.

Aufgabe 4

Finden Sie einen \mathbb{F}_2 -Vektorraum V und eine Teilmenge $\emptyset \neq M \subseteq V$, sodass für alle $x, y \in M$ die Gerade

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in \mathbb{F}_2\}$$

eine Teilmenge von M ist und M kein affiner Unterraum ist.

(Dies zeigt, dass die Aussage aus Aufgabe 1 auf Übungsblatt 4 nicht mehr wahr ist, wenn man \mathbb{R} durch einen anderen Körper ersetzt.)

Sie können die Vorlesung über den folgenden Link evaluieren:

<https://onlineumfrage.kit.edu/evasys/online.php?p=MHPXD>

Alternativ können Sie auch den folgenden QR-Code nutzen:



Abgabe: Die Abgabe für dieses Blatt erfolgt

- (i) entweder bis Freitag, 22.12.2023, um 12:00 Uhr im Abgabekasten ihres Tutors
- (ii) oder am Montag, 08.01.2024, direkt vor der Übung beim Übungsleiter
- (iii) oder bis Montag, 08.01.2024, um 8:00 Uhr bei Ihrem Tutor per E-Mail (oder per Abgabekasten in der ILIAS-Gruppe ihres Tutoriums, falls ihr Tutor einen eingerichtet hat).