

Aufgabe 1 (*)

(8 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ und $v_1, \dots, v_m \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass für alle $w \in V$

$$\dim \text{LH}(v_1 + w, \dots, v_m + w) \geq m - 1.$$

Aufgabe 2

Es seien $(G, *)$ eine Gruppe und $\mathbb{K}$ ein Körper, sowie $\chi_1, \chi_2 : M \rightarrow \mathbb{K}^\times$ zwei verschiedene Gruppenhomomorphismen. Zeigen Sie, dass χ_1 und χ_2 im $\mathbb{K}$ -Vektorraum $\mathbb{K}^G$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 3

Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$ -Vektorraum und es seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ Primzahlen. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{\log(p_1), \dots, \log(p_n)\} \subseteq \mathbb{R}$$

linear unabhängig ist und folgern Sie, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$ -Vektorraum unendlichdimensional ist. (Hinweis: Der Fundamentalsatz der Arithmetik, 3.1.17, könnte nützlich sein.)

Aufgabe 4 (*)

(8 Punkte)

Im Vektorraum $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ über dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_6 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie Basen von

- a) $U := \text{LH}(v_1, v_2, v_3)$,
- b) $V := \text{LH}(v_4, v_5, v_6)$,
- c) $U \cap V$.

Sie können die Übung dies Woche (08.01.2024 bis 14.01.2014 um 22:00 Uhr) über den folgenden Link evaluieren:

<https://onlineumfrage.kit.edu/evasys/online.php?p=KSLGJ>

Alternativ können Sie auch den folgenden QR-Code nutzen:



Abgabe: Die Abgabe für dieses Blatt erfolgt

- (i) entweder bis Freitag, 12.01.2024, um 12:00 Uhr im Abgabekasten ihres Tutors
- (ii) oder am Montag, 15.01.2024, direkt vor der Übung beim Übungsleiter
- (iii) oder bis Montag, 15.01.2024, um 8:00 Uhr bei Ihrem Tutor per E-Mail (oder per Abgabekasten in der ILIAS-Gruppe ihres Tutoriums, falls ihr Tutor einen eingerichtet hat).