# Klausur zur Bachelorprüfung
# Höhere Mathematik I
# Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 15. Februar 2020

**Aufgabe 1**

Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\sinh(3z) = \frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} - \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\frac{3z}{2}} \sin\left(\mathrm{i}\,\frac{3z}{2}\right).$$

**Aufgabe 2**

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = 2\cos(x)\,y(x) - \sin(2x)\,\sqrt{y(x)}\,, \qquad y(0) = 4\,.$$

**Aufgabe 3**

Gegeben ist die Folge $(a_n)$ durch einen Startwert $a_1 \in \mathbb{R}$ und die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\,a_n^2 - 2a_n + 4\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(a_n)$ für $a_1 \in [2,4]$ beschränkt und monoton ist.

(b) Zeigen Sie für $a_1 \geq 4$ die Ungleichung

$$a_n - 4 \geq 2^{n-1}\,(a_1 - 4)\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

(c) Für welche $a_1 \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge, für welche divergiert sie? Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

**Aufgabe 4**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{x^2+1}{3+x}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}\,.$$

(a) Bestimmen Sie eine Potenzreihendarstellung von $f$ für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe?

(c) Welchen Wert hat $f^{(6)}(0)$?

**Aufgabe 5**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}\,, & x \neq 0 \\ 1\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie die Ungleichung $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $|x| > 1$ und $|x| \leq 1$ getrennt. Im zweiten Fall untersuchen Sie das Vorzeichen von $f'$.

**Lösung zu 1:** Mit den Darstellungen des Sinus und des Sinus hyperbolikus durch die Exponentialfunktion gilt

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{3z}-\mathrm{e}^{-3z}\right)=\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}-\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-3z/2}}{2\,\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{-3z/2}-\mathrm{e}^{3z/2}\right)=\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-3z}\right).$$

Multiplikation mit 2 und Addition von $\mathrm{e}^{-3z}$ auf beiden Seiten liefert

$$\mathrm{e}^{3z}=1+\sqrt{3}\mathrm{i}\,.$$

Es ist

$$|1+\sqrt{3}\mathrm{i}|^2=1+3=4\,,\qquad \text{also}\quad |1+\sqrt{3}\mathrm{i}|=2\,.$$

Mit bekannten Werten der trigonometrischen Funktionen ergibt sich

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\,.$$

Mit Anwendung des komplexen Logarithmus und aus der Periodizität der Exponentialfunktion erhalten wir

$$3z=\ln(1+\sqrt{3}\mathrm{i})+2\pi n\mathrm{i}=\ln(2)+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Somit erhalten wir die Lösungen

$$z=\frac{1}{3}\ln(2)+\mathrm{i}\,\frac{(6n+1)\,\pi}{9},\qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

**Lösung zu 2:** Es handelt sich um eine Bernoulli'sche Differentialgleichung mit Exponent $\alpha=\frac{1}{2}$. Mit $\lambda=1/(1-\alpha)=2$ machen wir die Substitution $y(x)=(u(x))^2$, wobei wir von $u(x)\geq 0$ ausgehen. Mit der Ableitung $y'(x)=2\,u(x)\,u'(x)$ ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$2\,u(x)\,u'(x)=2\,\cos(x)\,u(x)^2-\sin(2x)\,u(x)\,.$$

Nach Division mit $2u(x)$ erhalten wir die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$u'(x)=\cos(x)\,u(x)-\frac{1}{2}\,\sin(2x)\,.$$

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung $u_h$ der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung durch Seperation:

$$\frac{u_h'(x)}{u_h(x)}=\cos(x)\,,\qquad \text{also}\quad \ln|u_h(x)|=\sin(x)+\tilde{C}\,.$$

Anwenden der Exponentialfunktion und die Substitution $C=\pm\mathrm{e}^{\tilde{C}}$ liefert die allgemeine Lösung

$$u_h(x)=C\,\mathrm{e}^{\sin(x)}\,.$$

Als nächstes ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bestimmen. Dazu führen wir *Variation der Konstanten* durch,

$$u_p(x)=C(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}\,.$$

Mit $u_p'(x)=C'(x)\,\exp(\sin(x))+C(x)\,\cos(x)\,\exp(\sin(x))$ erhalten wir

$$\begin{aligned}C'(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}+C(x)\,\cos(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}&=\cos(x)\,C(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}-\frac{1}{2}\,\sin(2x)\,,\\ C'(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}&=-\frac{1}{2}\,\sin(2x)\,,\\ C'(x)&=-\frac{1}{2}\,\sin(2x)\,\mathrm{e}^{-\sin(x)}\,.\end{aligned}$$

Vor der Integration verwenden wir noch die Identität $\sin(2x)=2\,\sin(x)\,\cos(x)$. Somit ist mit der Substitution $v=\sin(x)$ ($\mathrm{d}v=\cos(x)\,\mathrm{d}x$)

$$C(x)=-\int\sin(x)\,\cos(x)\,\mathrm{e}^{-\sin(x)}\,\mathrm{d}x=-\int v\,\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v\,.$$

Eine partielle Integration mit $f'(v)=\mathrm{e}^{-v}$, $g(v)=v$ liefert

$$C(x)=v\,\mathrm{e}^{-v}-\int\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v=(v+1)\,\mathrm{e}^{-v}=(1+\sin(x))\,\mathrm{e}^{-\sin(x)}\,.$$

Somit lautet eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$u_p(x)=1+\sin(x)$$

und die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$u(x)=u_p(x)+u_h(x)=1+\sin(x)+C\,\mathrm{e}^{\sin(x)}\,.$$

Mit unserer Annahme $u(x)\geq 0$ und der Anfangsbedingung $y(0)=4$ gilt $u(0)=2$ und somit ist $2=1+C$, d.h. $C=1$. Die Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir schließlich durch Rücksubstitution

$$y(x)=\left(1+\sin(x)+\mathrm{e}^{\sin(x)}\right)^2\,.$$

**Lösung zu 3:** (a) Zunächst ist

$$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}\,a_n^2-2a_n+2=\frac{1}{2}\left(a_n^2-4a_n+4\right)=\frac{1}{2}\,(a_n-2)^2\geq 0\,,$$

und somit $a_n\geq 2$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass auch $a_n\leq 4$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt, falls $a_1\in[2,4]$ ist.

Der Induktionsanfang stimmt laut Voraussetzung. Ist nun $a_n\in[2,4]$ für ein $n\in\mathbb{N}$, so gilt

$$a_{n+1}-4=\frac{1}{2}\,a_n^2-2a_n=\frac{a_n}{2}\,(a_n-4)\leq 0$$

nach Induktionsvoraussetzung, denn der erste Faktor ist größer gleich 0, der zweite kleiner gleich 0. Damit ist der Induktionsschritt erbracht und es folgt $a_n \in [2,4]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist beschränkt.

Wir betrachten noch die Monotonie.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2}\,a_n^2 - 3a_n + 4 = \frac{1}{2}\left(a_n^2 - 6a_n + 8\right) \\ &= \frac{1}{2}\,(a_n - 2)\,(a_n - 4)\,. \end{aligned}$$

Aus $a_n \in [2,4]$ folgt nun $a_{n+1} - a_n \le 0$, die Folge ist also monton fallend.

(b) Zunächst sieht man wie in Teil (a): Ist $a_1 \ge 4$, so ist auch $a_n \ge 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Jetzt beweisen wir die Behauptung mit vollständiger Induktion. Für $n = 1$ gilt nach Vorraussetzung

$$a_1 - 4 = 1 \cdot (a_1 - 4) = 2^0 \cdot (a_1 - 4)\,.$$

Somit ist der Induktionsanfang erbracht.

Wir nehmen an, dass die Ungleichung für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. Dann folgt

$$a_{n+1} - 4 = \frac{a_n}{2}\,(a_n - 4) \overset{\text{I.V.}}{\ge} \frac{a_n}{2}\,2^{n-1}\,(a_1 - 4) \overset{a_n \ge 4}{\ge} \frac{4}{2}\,2^{n-1}\,(a_1 - 4) = 2^n\,(a_1 - 4)\,.$$

Also ist der Induktionsschritt erbracht und die Abschätzung aus Teil (b) bewiesen.

(c) Für $a_1 \in [2,4]$ ist die Folge $(a_n)$ nach mit (a) nach dem Monotoniekriterium konvergent. Für $a_1 > 4$ git nach (b) die Abschätzung $a_n \ge c\,2^n$ mit einer positiven Konstante $c$. Damit divergiert die Folge in diesem Fall. Mit

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}\,(a_n - 2)^2$$

erkennt man:

$$a_1 \in [0,2) \quad \Longrightarrow \quad a_2 \in (2,4]\,, \qquad a_1 \in (-\infty,0) \quad \Longrightarrow \quad a_2 \in (4,\infty)\,.$$

Damit konvergiert die Folge auch für $a_1 \in [0,2)$ und divergiert für $a_1 \in (-\infty,0)$.

Für $a_1 = 2$ oder $a_1 = 4$ ist die Folge konstant, der Grenzwert ist gleich dem Startwert. Für $a_1 \in (2,4)$ lautet die Fixpunktgleichung

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\,a_n^2 - 2a_n + 4\right) = \frac{a^2}{2} - 2a_n + 4\,.$$

Dies liefert

$$0 = a^2 - 6a + 8 = (a-2)\,(a-4)\,.$$

Da die Folge monoton fällt, kommt $a = 4$ nicht in Frage, somit ist in diesem Fall $a = 2$.

Mit den Überlegungen von oben ist der Grenzwert $a = 2$ für $a_1 \in (0,2)$ und $a = 4$ für $a_1 = 0$.

**Lösung zu 4:** (a) Es gilt

$$x^2 + 1 = (3+x)\,f(x) = (3+x)\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3a_k\,x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^{k+1} = 3a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(3a_k + a_{k-1})\,x^k\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} k = 0: &\quad 1 = 3a_0\,, & &\text{d.h.}\quad a_0 = \frac{1}{3}\,, \\ k = 1: &\quad 0 = 3a_1 + a_0 = 3a_1 + \frac{1}{3}\,, & &\text{d.h.}\quad a_1 = -\frac{1}{9}\,, \\ k = 2: &\quad 1 = 3a_2 + a_1 = 3a_2 - \frac{1}{9}\,, & &\text{d.h.}\quad a_2 = \frac{10}{27}\,, \\ k \ge 3: &\quad 0 = 3a_k + a_{k-1}\,, & &\text{d.h.}\quad a_k = -\frac{a_{k-1}}{3}\,. \end{aligned}$$

Somit vermuten wir $a_k = (-1)^k\,10/3^{k+1}$, $k \ge 2$, was sich durch vollständige Induktion sofort beweisen lsst. Damit ist die Potenzreihendarstellung von $f$

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{10}{3}\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^k\,.$$

(b) Die Reihe ist bis auf die ersten beiden Glieder eine geometrische Reihe mit $q = -x/3$. Sie konvergiert also für $|q| < 1$, in allen anderen Fällen divergiert sie. Somit konvergiert die Reihe genau für $|x| < 3$.

(c) Die Potenzreihendarstellung von $f$ entspricht der Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Damit ist

$$\frac{10\cdot(-1)^6}{3^7} = \frac{f^{(6)}(0)}{6!}\,, \qquad \text{also} \quad f^{(6)}(0) = \frac{10\cdot 6!}{3^7} = \frac{10\cdot 2^2\cdot 4\cdot 5}{3^5} = \frac{800}{243}\,.$$

**Lösung zu 5:** Ist $|x| > 1$, so ist

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| < |\sin(x)| \le 1\,.$$

Es genügt also das Intervall $[-1,1]$ zu betrachten.

Mit der Regel von de l'Hospital erkennen wir, dass $f$ auf diesem Intervall stetig ist. Das das Intervall außerdem beschränkt und abgeschlossen, also kompakt, ist, nimmt $f$ dort sein Maximum und sein Minimum an. Allerdings ergibt sich in diesem konkreten Fall die Existenz eines Maximums und zweier Minima direkt aus dem Monotonieverhalten von $f$, siehe unten.

Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ bestimmen wir die Ableitung

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x\,\cos(x) - \sin(x)}{x^2}\,.$$

Da der Nenner positiv ist, reicht es aus, den Zähler zu betrachten. Setze also (sogar für $x \in \mathbb{R}$)

$$g(x) = x\,\cos(x) - \sin(x)\,.$$

Dann ist $g'(x) = -x\,\sin(x)$. Diese Funktion ist negativ auf $[-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$. Also ist $g$ auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton fallend. Da $g(-\pi/2) = 1$, $g(0) = 0$ und $g(\pi/2) = -1$ ist, ist $g$ auf $[-\pi/2, 0)$ positiv und auf $(0, \pi/2]$ negativ.

Für $f'$ bedeutet dies, dass $f'$ positiv auf $(-1, 0)$ und negativ auf $(0, 1)$ ist.

Somit, da $f$ stetig ist, ist $f$ auf $[-1, 0]$ streng monoton wachsend, auf $[0, 1]$ streng monoton fallend. Also hat $f$ sein Maximum in $[-1, 1]$ in 0 mit dem Funktionswert $f(0) = 1$ und sein Minimum in $\pm 1$ mit dem Funktionswert $f(\pm 1) = \sin(1) > 0 > -1$. Also ist $-1 \leq f(x) \leq 1$ auf $[-1, 1]$, was zu zeigen war.

# Klausur zur Bachelorprüfung
# Höhere Mathematik I
# Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 10. September 2020

**Aufgabe 1**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \mathrm{e}^{2z} - (1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{z} + 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-z} + \mathrm{i} - 2\,.$$

(a) Überprüfen Sie, dass mit $z = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$ eine Nullstelle von $f$ gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f$.

**Aufgabe 2**

Die Folge $(a_n)$ ist für $a_0 \geq -3$ rekursiv gegeben durch

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} - 1\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(a) Zeigen Sie: im Fall $a_0 \leq 1$ ist $a_n \in [-1, 1]$ und im Fall $a_0 \geq 1$ ist $a_n \geq 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Begründen Sie, dass die Folge für jeden Wert $a_0 \geq -3$ konvergiert.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge für $a_0 \geq -3$.

**Aufgabe 3**

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}} \quad \text{für } x \neq \pm\frac{\pi}{2}\,,$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

(a) Bestimmen Sie die Linearisierung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu $f$, d.h.

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = -\frac{1}{4}$ eine Lösung besitzt.

**Aufgabe 4**

(a) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} n\,a^n = 0$ für jedes $a \in (0, 1)$.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \mathrm{e}^{-nx^2}}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^n + n} \left|x - \frac{\pi}{2}\right|^{\frac{n}{2}}$$

konvergiert.

**Aufgabe 5**

Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\cos(\tan(x))}{\cos^2(x)}\,\mathrm{e}^{-\tan(x)}$$

und berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{a \to \frac{\pi}{2}} \int_0^a f(x)\,dx\,.$$

**Lösung zu 1:** (a) Wir erhalten mit der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{2}\mathrm{i}) &= \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} - (1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} + (\mathrm{i}-2) + 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \\ &= -1 - (1+\mathrm{i})(\mathrm{i}) + (\mathrm{i}-2) + 2\mathrm{i}(-\mathrm{i}) = -1 - \mathrm{i} + 1 + \mathrm{i} - 2 + 2 = 0\,. \end{aligned}$$

(b) Die Substitution $w = \mathrm{e}^z$ liefert

$$w^3 - (1+\mathrm{i})w^2 + (\mathrm{i}-2)w + 2\mathrm{i} = 0\,.$$

Mit der Nullstelle $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$ aus Teil (a) ergibt sich mit Polynomdivision

$$\begin{array}{l} w^3 - (1+\mathrm{i})w^2 + (\mathrm{i}-2)w + 2\mathrm{i} \quad = (w-\mathrm{i})(w^2 - w - 2) \\ \underline{w^3 - \quad \mathrm{i}\,w^2} \\ \qquad -w^2 + (\mathrm{i}-2)w + 2\mathrm{i} \\ \qquad \underline{-w^2 + \quad \mathrm{i}\,w} \\ \qquad\qquad -2\,w + 2\mathrm{i} \\ \qquad\qquad \underline{-2\,w + 2\mathrm{i}} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array} .$$

Wir berechnen noch die beiden Nullstellen $w = -1$ und $w = 2$ aus $w^2 - w - 2 = (w - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$. Rücksubstitution liefert die Nullstellen:

$$\begin{aligned} w = \mathrm{i} \quad &\rightsquigarrow \quad z = (\frac{\pi}{2} + 2\pi n)\,\mathrm{i} \\ w = -1 \quad &\rightsquigarrow \quad z = (1+2n)\pi\,\mathrm{i} \\ w = 2 \quad &\rightsquigarrow \quad z = \ln(2) + 2\pi n\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

**Lösung zu 2:** (a) Wir zeigen die beiden Behauptungen induktiv.

(i) Ist $a_0 \in [-3,1]$, so ist $0 \le 3 + a_0 \le 4$, und mit der Monotonie der Wurzel ergibt sich der Induktionsanfang $-1 \le \sqrt{3+a_0} - 1 = a_1 \le 1$. Analog folgt aus $-1 \le a_n \le 1$ der Induktionsschritt

$$-1 \le \sqrt{3+a_n} - 1 = a_{n+1} \le 1$$

für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Im anderen Fall, $a_0 \ge 1$, ergibt sich sowohl der Induktionsanfang als auch der Induktionsschritt mit $a_n \ge 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$ aus

$$a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} - 1 \ge \sqrt{4} - 1 \ge 1\,.$$

(b) Mit der dritten binomischen Formel erhalten wir

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{3+a_n} - (1+a_n) = \frac{3 + a_n - (1+a_n)^2}{\sqrt{3+a_n} + (1+a_n)} = \frac{2 - a_n - a_n^2}{\sqrt{3+a_n} + (1+a_n)}\,.$$

Da der Nenner für $a_n \ge -1$ stets positiv ist, ergibt sich aus der Faktorisierung $2 - a_n - a_n^2 = -(a_n-1)(a_n+2) \ge 0$ im Fall (i) mit $a_n \in [-1,1]$ eine monoton steigende Folge und im Fall (ii) mit $a_n \ge 1$ eine monoton fallende Folge. In beiden Fällen liefert das Monotniekriterium mit der Beschränkung $a_n \in [-1,1]$, bzw. $a_n \in [1, a_1]$ im zweiten Fall, die Konvergenz der Folge.

(c) Aus der Fixpunktgleichung $a = \sqrt{3+a} - 1$ folgt

$$a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2) = 0$$

und somit ist mit dem einzigen Fixpunkt $a = 1 \ge -1$ in beiden Fällen der Grenzwert der Folge $(a_n)$ gegeben.

**Lösung zu 3:** (a) Zunächst berechnen wir mit der Regel von L'Hospital den Funktionswert in $x_0$ zu

$$f(x_0) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{\pi}\,.$$

Die Ableitung zu $f$ für $x \ne \pm\frac{\pi}{2}$ ist

$$f'(x) = \frac{-(x^2 - \frac{\pi^2}{4})\sin(x) - 2x\cos(x)}{(x^2 - \frac{\pi^2}{4})^2}\,.$$

Den Funktionswert $f'(\frac{\pi}{2})$ erhalten wir wiederum mit der Regel von L'Hospital durch

$$\begin{aligned} f'(\frac{\pi}{2}) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-(x^2 - \frac{\pi^2}{4})\sin(x) - 2x\cos(x)}{(x^2 - \frac{\pi^2}{4})^2} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-(x^2 - \frac{\pi^2}{4} + 2)\cos(x)}{4x(x^2 - \frac{\pi^2}{4})} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(x^2 - \frac{\pi^2}{4} + 2)\sin(x) - 2x\cos(x)}{4(x^2 - \frac{\pi^2}{4}) + 8x^2} = 1/\pi^2\,. \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$g(x) = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{2})\,.$$

(b) Mit $f(0) = -\frac{4}{\pi^2}$, $f(\pi) = -\frac{4}{3}\frac{1}{\pi^2}$ und der Abschätzung

$$\frac{4}{3\pi^2} \le \frac{4}{27} \le \frac{1}{4} = \frac{4}{16} \le \frac{4}{\pi^2}$$

liefer der Zwischenwertsatz die Behauptung.

**Lösung zu 4:** (a) Mit $a \in (0,1)$ und $\sqrt[n]{n} \to 1,\ n \to \infty$ gibt es $N \ge 0$ und $b \in (0,1)$, sodass $a\sqrt[n]{n} \le b < 1$ für alle $n \ge N$. Also folgt

$$n\,a^n \le b^n \to 0,\ n \to \infty\,.$$

Alternativ lässt sich der Grenzwert auch mit der Regel von L'Hospital zeigen durch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{a^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(a)a^{-x}} = 0\,.$$

(b) Wir betrachten den Grenzwert

$$\frac{\frac{1+\mathrm{e}^{-(n+1)x^2}}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n+1}+n+1}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{\frac{n+1}{2}}}{\frac{1+\mathrm{e}^{-nx^2}}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n}+n}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{\frac{n}{2}}} = \frac{1+\mathrm{e}^{-(n+1)x^2}}{1+\mathrm{e}^{-nx^2}}\,\frac{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^n+n}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n+1}+n+1}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{\frac{1}{2}} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{\frac{1}{2}}$$

für $n\to\infty$. Dabei nutzen wir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{-(n+1)x^2}}{1+\mathrm{e}^{-nx^2}} = \begin{cases} \frac{2}{2}=1 & \text{für } x=0\\ \frac{1}{1}=1 & \text{für } x\neq 0\end{cases}$$

und mit Teilaufgabe (a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^n+n}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n+1}+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^n n}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^n (n+1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.$$

Mit dem Quotientenkriterium erhalten wir Konvergenz der Reihe, wenn

$$\frac{2}{\pi}|x-\frac{\pi}{2}|<1$$

gilt, also im Fall $x\in(0,\pi)$. Ausserdem liefert das Quotientenkriterium Divergenz der Reihe, wenn $x\notin[0,\pi]$ ist.

Im Fall $x=0$ ergibt sich für die Summanden der Reihe

$$\frac{2}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^n+n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{2}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^n n}\to 2\,,\quad n\to\infty$$

und im Fall $x=\pi$

$$\frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi^2/4}}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^n+n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\to 1\,,\quad n\to\infty\,.$$

In beiden Fällen bilden die Summanden keine Nullfolge. Daher divergiert die Reihe in diesen Fällen und wir erhalten Konvergenz ausschliesslich im Fall $x\in(0,\pi)$.

**Lösung zu 5:** Mit der Substitution $u=\tan x$ und der Ableitung $\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos^2(x)}$ folgt

$$\int\frac{\cos(\tan(x))}{\cos^2(x)}\mathrm{e}^{-\tan(x)}\,dx = \int\cos(u)\mathrm{e}^{-u}\,du\,.$$

Zweimal partiell Integrieren führt auf

$$\int\cos(u)\mathrm{e}^{-u}\,du = \sin(u)\mathrm{e}^{-u}+\int\sin(u)\mathrm{e}^{-u}\,du = \sin(u)\mathrm{e}^{-u}-\cos(u)\mathrm{e}^{u}-\int\cos(u)\mathrm{e}^{-u}\,du\,.$$

Also erhalten wir nach Rücksubstitution die Stammfunktion

$$\int\frac{\cos(\tan(x))}{\cos^2(x)}\mathrm{e}^{-\tan(x)}\,dx = \frac{1}{2}\big(\sin(\tan(x))-\cos(\tan(x))\big)\mathrm{e}^{-\tan(x)}\,.$$

Aus der Beschränkung $|\sin(\tan(x))-\cos(\tan(x))|\leq 2$ für jedes $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ und $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x)=+\infty$ folgt weiterhin

$$\lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\int_0^a f(x)\,dx = \lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\big(\sin(\tan(x))-\cos(\tan(x))\big)\mathrm{e}^{-\tan(x)}-\frac{1}{2}(\sin(0)-\cos(0))\mathrm{e}^0 = \frac{1}{2}\,.$$

Karlsruher Institut für Technologie

# Upload-Klausur zur Bachelorprüfung
# Höhere Mathematik I
# Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 9. April 2021

### Aufgabe 1

Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(3-2\mathrm{i})\cos(z) - (2+\mathrm{i})\sin(z) = -1+\mathrm{i}\,.$$

### Aufgabe 2

Gegeben ist die Folge $(a_n)$ mit $a_1 \in [1,2]$ und

$$a_{n+1} = \frac{2}{3-a_n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Zeigen Sie $a_n \in [1,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Begründen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert in Abhängigkeit von $a_1$.

### Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{4-x}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{2,\,4\}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $f$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Potenzreihe?

(c) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{4^n}\right).$$

### Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x^{1/3}}{1+64\,x^3}\,, & x \geq 0\,, \\[2mm] \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f$ stetig ist.

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Abschätzungen

$$0 \leq f(x) \leq \frac{13}{9}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.

### Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1+x^2)\,y'(x) = 4\,(1+x^2)\,(y(x))^{3/4} + 8x\,y(x)\,, \quad x > 0\,, \qquad y(1) = \pi^4\,.$$

**Lösung zu 1:** Wir setzen die Darstellungen der Kosinus- und Sinusfunktion durch die Exponentialfunktion ein und multiplizieren die Gleichung mit 2i. So erhalten wir

$$(2+3\mathrm{i})\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)-(2+\mathrm{i})\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)=-2-2\mathrm{i}\,.$$

Wir substituieren $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, multiplizieren mit $w$ und bringen alle Terme nach links. Dadurch erhalten wir die quadratische Gleichung

$$2\mathrm{i}\,w^2+(2+2\mathrm{i})\,w+4+4\mathrm{i}=0\,.$$

Wir dividieren noch durch 2i und führen dann quadratische Ergänzung durch:

$$\begin{aligned} w^2+(1-\mathrm{i})\,w+2-2\mathrm{i}&=0\,.\\ \left(w+\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^2+2-2\mathrm{i}-\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^2&=0\,.\\ \left(w+\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^2&=-2+2\mathrm{i}-\frac{\mathrm{i}}{2}=-2+\frac{3}{2}\mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

Wir suchen zunächst eine Zahl $x+\mathrm{i}y$, $x,\,y\in\mathbb{R}$, mit $(x+\mathrm{i}y)^2=-2+3/2\,\mathrm{i}$. Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert das nichtlineare Gleichungssystem

$$x^2-y^2=-2\,,\qquad 2xy=\frac{3}{2}\,.$$

Wir setzen $y=3/(4x)$ in die erste Gleichung ein:

$$x^2-\frac{9}{16x^2}=-2\,,\qquad \text{also}\quad x^4+2x^2-\frac{9}{16}=0\,.$$

Mit quadratischer Ergnzung folgt $(x^2+1)^2=25/16$, also $x^2=-1\pm 5/4$. Da $x\in\mathbb{R}$ kommt nur die positive Lösung in Frage, also $x^2=1/4$. Wir erhalten $x=\pm 1/2$ und $y=\pm\frac{3}{2}$. Somit ist

$$w=-\frac{1-\mathrm{i}}{2}+\frac{1+3\mathrm{i}}{2}=2\mathrm{i}\qquad\text{oder}\qquad w=-\frac{1-\mathrm{i}}{2}-\frac{1+3\mathrm{i}}{2}=-1-\mathrm{i}\,.$$

Es bleibt noch die Rücksubstitution von $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ durchzuführen. Im Falle $w=2\mathrm{i}$ ist $|w|=2$, $\mathrm{Arg}(w)=\pi/2$, also

$$\mathrm{i}z=\ln(2)+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Im Falle $w=-1-\mathrm{i}$ ist $|w|=\sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}(w)=-3\pi/4$, also

$$\mathrm{i}z=\ln(\sqrt{2})+\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung ist also

$$\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n-\mathrm{i}\,\ln(2):n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{3\pi}{4}+2\pi n-\mathrm{i}\,\ln(\sqrt{2}):n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

**Lösung zu 2:** (a) Wir zeigen dies durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang ($n=1$) ist durch die Aufgabenstellung schon vorgegeben. Es ist also nur noch der Induktionsschritt zu erbringen. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir also an, dass $a_n\in[1,2]$ für ein $n$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} a_{n+1}-1&=\frac{2}{3-a_n}-1=\frac{2-3+a_n}{3-a_n}=\frac{a_n-1}{3-a_n}\overset{\text{I.V.}}{\geq}0\,,\\ a_{n+1}-2&=\frac{2}{3-a_n}-2=\frac{2-6+2a_n}{3-a_n}=-2\frac{2-a_n}{3-a_n}\overset{\text{I.V.}}{\leq}0\,.\end{aligned}$$

Also ist auch $a_{n+1}\in[1,2]$. Somit ist der Induktionsschritt erbracht. Es folgt $a_n\in[1,2]$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gezeigt.

(b) Nach Teil (a) ist die Folge beschränkt. Wir untersuchen sie auf Monotonie:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2}{3-a_n}-a_n=\frac{2-3a_n+a_n^2}{3-a_n}=\frac{(a_n-1)\,(a_n-2)}{3-a_n}\leq 0\,,$$

wobei wir die Schranken aus Teil (a) verwenden. Die Folge ist also monoton fallend. Aus dem Monotoniekriterium ergibt sich, dass die Folge konvergiert.

Wir setzen $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ und bilden die Fixpunktgleichung:

$$a=\frac{2}{3-a}\quad\Longleftrightarrow\quad a^2-3a+2=0\quad\Longleftrightarrow\quad(a-1)\,(a-2)=0\,.$$

Der Grenzwert ist also entweder 1 oder 2. Da die Folge monoton fällt, ist $a=1$ für $a_1\in[1,2)$.

Ist $a_1=2$, so folgt $a_2=2$ und induktiv ergibt sich $a_n=2$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Somit ist $a=2$ für $a_1=2$.

**Lösung zu 3:** (a) Wir verwenden die geometrische Reihe und erhalten

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}+1}{4^{n+1}}\,x^n$$

für $|x|<2$.

(b) Aus der Herleitung über die geometrische Reihe folgt direkt, dass die Reihe genau für $|x|<2$ konvergiert.

Man kann sich davon aber auch über das Wurzelkriterium (oder ähnlich über das Quotientenkriterium) überzeugen. Es ist

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^{n+1}+1}{4^{n+1}}\,x^n\right|}=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\,\frac{\sqrt[n]{2^n+\frac{1}{2}}}{4}\,|x|\longrightarrow\frac{|x|}{2}\quad(n\to\infty)\,.$$

Dabei verwenden wir im Zähler das Einschließungskriterium:

$$2=\sqrt[n]{2^n}\leq\sqrt[n]{2^n+\frac{1}{2}}\leq\sqrt[n]{2^n+2^n}=\sqrt[n]{2\cdot 2^n}=\sqrt[n]{2}\cdot 2\longrightarrow 2\quad(n\to\infty)\,.$$

In den Randpunkten $x=\pm 2$ sind die Reihenglieder

$$(-1)^n\,\frac{2^{n+1}+1}{4^{n+1}}\,2^n=(-1)^n\,\frac{2+\frac{1}{2^n}}{4}$$

und konvergieren daher nicht gegen null. Also divergiert die Reihe in den Randpunkten nach dem Nullfolgenkriterium.

(c) Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{4^n} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{4^n} = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+1}{4^{n+1}} = 2 + f(1) = 2 + \frac{1}{2-1} + \frac{1}{4-1} = \frac{10}{3}.$$

**Lösung zu 4:** (a) Beide Ausdrücke sind Kompositionen stetiger Funktionen und die Nenner werden niemals null. Daher ist $f$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Auerdem gilt $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 1$. Es ist noch zu zeigen, dass auch $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1$ ist.

$$x \to 0- \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} \to -\infty \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} \to 1 .$$

Somit ist $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(b) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{x^{1/3}}{1+64\,x^3} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1/3}}{1+64\,x^3} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-8/3}}{x^{-3}+64} = 1 + \frac{0}{0+64} = 1$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\exp(\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x})} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(c) Alle in der Definition von $f$ auftretenden Terme sind auf den entsprechenden Intervallen für $x$ positiv. Somit ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x < 0$ gilt

$$f'(x) = -\frac{1}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^2} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) > 0 .$$

Daher ist $f$ auf $(-\infty, 0]$ streng monoton wachsend und somit $f(x) \leq f(0) = 1$ für $x \leq 0$.

Für $x > 0$ gibt es wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ ein $A > 0$ mit $f(x) \leq 1 + \frac{2^{2/3}}{3}$ für alle $x > A$.

Es bleibt das Intervall $[0, A]$ zu betrachten. Auf diesem kompakten Intervall nimmt die stetige Funktion $f$ ihr Maximum an. Von den Randwerten wissen wir bereits, dass sie die Ungleichungen erfüllen. Wir suchen noch nach möglichen Maximalstellen in $(0, A)$. Dazu berechnen wir

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}\,x^{-2/3}\,(1+64\,x^3) - x^{1/3}\,192\,x^2}{(1+64\,x^3)^2} = \frac{1+64x^3-576x^3}{3\,x^{2/3}\,(1+64\,x^3)^2}, \qquad x \in (0, A).$$

Somit ist $f'(x) = 0$ genau für $1 - 512x^3 = 0$, also für $x = 1/8$, wenn wir o.E. $A > 1/8$ annehmen. Der Funktionswert an dieser Stelle ist

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{1/3}}{1+64\,\left(\frac{1}{8}\right)^3} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{8}} = \frac{13}{9}.$$

Also ist auch $f(x) \leq \frac{13}{9}$ auf $(0, A)$.

**Lösung zu 5:** Es handelt sich um eine Bernoulli'sche Differentialgleichung. Wir substitutieren $y(x) = u(x)^\lambda$ mit

$$\lambda = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4 \qquad \text{und} \qquad u(x) \geq 0 .$$

Dann ist $y'(x) = 4\,u(x)^3\,u'(x)$, wir erhalten also die Gleichung

$$4\,(1+x^2)\,u(x)^3\,u'(x) = 4\,(1+x^2)u(x)^3 + 8x\,u(x)^4 .$$

Wir dividieren durch $4u(x)^3$ und erhalten eine lineare Differentialgleichung für $u$:

$$(1+x^2)\,u'(x) = 2x\,u(x) + 1 + x^2 .$$

Zunächst lösen wir die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung durch Separation. Für ihre Lösung $u_h$ gilt also

$$\frac{u_h'(x)}{u_h(x)} = \frac{2x}{1+x^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \ln|u_h(x)| = \ln(1+x^2) + \tilde{C} .$$

Wir wenden die Exponentialfunktion an, lösen den Betrag auf und ersetzen die Integrationskonstante, um die allgemeine Lösung

$$u_h(x) = C\,(1+x^2)$$

zu erhalten.

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung bestimmen wir durch Variation der Konstanten. Mit $u_p(x) = c(x)\,(1+x^2)$ ist $u_p'(x) = c'(x)\,(1+x^2) + 2x\,c(x)$. Wir setzen beide Formeln ein und erhalten

$$(1+x^2)^2\,c'(x) + 2x\,(1+x^2)\,c(x) = 2x\,(1+x^2)\,c(x) + 1 + x^2 .$$

Somit folgt

$$c'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{also} \quad c(x) = \arctan(x) .$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung lautet also

$$u(x) = (\arctan(x) + C)\,\left(1+x^2\right) .$$

Mit unserer Annahme $u(x) \geq 0$ folgt aus $y(1) = \pi^4$ auch $u(1) = \pi$. Somit ist

$$\pi = 2\,(\arctan(1) + C) = \frac{\pi}{2} + 2C .$$

Es folgt $C = \pi/4$ und insgesamt

$$y(x) = \left(\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{4}\right)(1+x^2)\right)^4 .$$

**Bemerkung:** Die Annahme $u(x) \geq 0$ ergibt sich natrlich aus der Tatsache, dass die Rücksubstitution (in diesem Fall $u(x) = y(x)^{1/4}$) wohldefiniert sein muss. Vergisst man dies, erhält man eine zweite „mögliche Lösung“

$$y(x) = \left(\left(\arctan(x) - \frac{3\pi}{4}\right)(1+x^2)\right)^4 .$$

Eine Probe unter Beachtung des Vorzeichens des Terms $(y(x))^{3/4}$ zeigt aber, dass dies tatsächlich keine Lösung der DGL ist.

Karlsruher Institut für Technologie

# Klausur zur Bachelorprüfung
# Höhere Mathematik I
# Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 6. September 2021

**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$3\,\cosh(3z) - 2\sinh(3z) = 2\,.$$

**Aufgabe 2**

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$a_n = \frac{n^2}{n-2} - \sqrt{n^2+1} \quad \text{für } n \geq 3 \quad \text{und } a_1 = a_2 = 0\,.$$

(a) Zeigen Sie Konvergenz der Folge und berechnen Sie ihren Grenzwert.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\left(\sum_{n=3}^{\infty} a_n\,(3x+1)^{2n}\right)$$

konvergiert.

**Aufgabe 3**

(a) Zeigen Sie, dass die differenzierbare Funktion $g : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x - \ln(x+1)$ genau eine Nullstelle in $x = 0$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{(x^2)}-1}{x-\ln(x+1)} & \text{für } x \in (-1,\infty)\setminus\{0\}\,, \\ a & \text{für } x = 0\,, \end{cases}$$

stetig ist.

(c) Begründen Sie, dass es eine Stelle $\widehat{x} \in (-1,\infty)$ gibt mit $f(\widehat{x}) = 1$.

**Aufgabe 4**

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,\infty) \to I$ für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{1}{2}x^2 + 1\,, & 0 \leq x < 2\,, \\ \dfrac{x-2}{x}\,, & 2 \leq x\,, \end{cases}$$

eine Umkehrfunktion besitzt, und geben Sie diese an.

**Aufgabe 5**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\arcsin(x)}\,dx$$

und geben Sie dabei explizit den Rechenweg mit den verwendeten Integrationstechniken an.

**Lösung zu 1:** Wir setzen die Darstellungen der hyperbolischen Funktionen durch die Exponentialfunktion ein:

$$\frac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{3z}+\mathrm{e}^{-3z}\right)-\left(\mathrm{e}^{3z}-\mathrm{e}^{-3z}\right)=2\,.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit 2 und sortieren die Terme:

$$\mathrm{e}^{3z}+5\mathrm{e}^{-3z}=4\,.$$

Mit der Substitution $w=\mathrm{e}^{3z}$ und nach Multiplikation mit $w$ erhalten wir somit die quadratische Gleichung

$$w^2-4w+5=0\,.$$

Mit der quadratischen Ergänzung $(w-2)^2+1=0$ ergeben sich die Lösungen

$$w_1=2-\mathrm{i}\,,\qquad w_2=2+\mathrm{i}\,.$$

Es gilt $|w_{1/2}|=\sqrt{5}$ und $\operatorname{Arg}(w_{1/2})=\pm\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. Also ist

$$\ln w_{1/2}=\ln\sqrt{5}\pm\mathrm{i}\arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

Mit der Rücksubstitution $w=\mathrm{e}^{3z}$ erhalten wir also

$$3z=\ln\sqrt{5}\pm\mathrm{i}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+2\pi n\mathrm{i}\,,\qquad n\in\mathbb{Z}\,,$$

bzw.

$$z=\frac{1}{3}\ln\sqrt{5}+\left(\pm\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\pi n\right)\mathrm{i}\,,\qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

**Lösung zu 2:** (a) Mit der dritten binomischen Formel, der Stetigkeit der Wurzel und den Nullfolgen $(n^{-p})_{n\in\mathbb{N}}$, $p\in\mathbb{N}$, erhalten wir Konvergenz und den Grenzwert aus

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{n-2}-\sqrt{n^2+1}&=\frac{n^4-(n-2)^2(n^2+1)}{(n-2)^2\left(\frac{n^2}{n-2}+\sqrt{n^2+1}\right)}\\&=\frac{4n^3-5n^2+4n-4}{(n^3-4n^2+4n)\left(\frac{n}{n-2}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}\\&=\frac{4-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{(1-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2})\left(\frac{1}{1-\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}\to\frac{4}{2}=2\,,\quad n\to\infty\,.\end{aligned}$$

(b) Mit Teil (a) ergibt sich für den Quotienten

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(3x+1)^{2(n+1)}}{a_n(3x+1)^{2n}}\right|=\frac{2}{2}|3x+1|^2=(3x+1)^2\,.$$

Mit dem Quotientenkriterium gilt absolute Konvergenz der Reihe für $x\in\mathbb{R}$ mit

$$(3x+1)^2<1\,.$$

Also ergibt sich der Konvergenzradius $r=\frac{1}{3}$ der Potenzreihe um $x_0=-\frac{1}{3}$ und wir erhalten Konvergenz der Reihe für $x\in(-\frac{2}{3},0)$.

Für $x\notin[-\frac{3}{2},0]$ ist die Potenzreihe divergent. Es bleiben die Randpunkte $x=0$ bzw. $x=-\frac{2}{3}$ zu untersuchen. An diesen Stellen ergibt sich jeweils die Reihe

$$\left(\sum_{n=3}^{\infty}a_n\right).$$

Diese Reihe ist divergent, da die Folge der Summanden keine Nullfolge ist (s. Teil (a)).

**Lösung zu 3:** (a) Für die Ableitung $g'(x)=1-\frac{1}{x+1}$ ergibt sich genau eine Nullstelle in $x=0$. Da $g(x)\to\infty$ gilt für $x\to-1$ und für $x\to\infty$, besitzt die differenzierbare Funktion genau eine Minimalstelle in $x=0$ und mit $g(0)=0$ ist $g(x)>0$ für $x\in(-1,0)\setminus\{0\}$.

(b) Ausserhalb der Stelle $x=0$ ist die Funktion stetig, da es sich um einen Quotienten stetiger Funktionen handelt und der Nenner nach Teil (a) nicht verschwindet.

Mit der Regel von l'Hospital erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{2^{(x^2)}-1}{x-\ln(x+1)}&=\lim_{x\to0}\frac{2\ln(2)x\,\mathrm{e}^{(\ln(2)x^2)}}{1-(x+1)^{-1}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(2\ln(2)+(2\ln(2)x)^2)\,\mathrm{e}^{(\ln(2)x^2)}}{(x+1)^{-2}}=2\ln(2)\end{aligned}$$

für den Wert von $a$.

(c) Es gilt

$$f(1)=\frac{1}{1-\ln(2)}>1\quad\text{und}\quad\lim_{x\to-1}f(x)=0\,.$$

Also gibt es wegen des Zwischenwertsatzes eine Stelle $\widehat{x}\in(-1,1)$ zur stetigen Funktion $f$ mit $f(\widehat{x})=1$.

**Lösung zu 4:** Die Funktion $f$ ist auf $(0,\infty)\setminus\{2\}$ differenzierbar mit

$$f'(x)=\begin{cases}2-x\,,&0<x<2\,,\\\dfrac{2}{x^2}\,,&2<x\,,\end{cases}$$

Daher ist $f'>0$ auf $(0,2)$ und auf $(2,\infty)$ und somit $f$ auf $[0,2)$ und auf $[2,\infty)$ jeweils streng monoton wachsend. Insbesondere werden diese Intervalle wieder auf Intervalle abgebildet, nämlich

$$\operatorname{Bild}(f|_{[0,2)})=\Big[f(0),\lim_{x\to2-}f(x)\Big)=[1,3)\,,\qquad\operatorname{Bild}(f|_{[2,\infty)})=\Big[f(2),\lim_{x\to\infty}f(x)\Big)=[0,1)\,.$$

Da $[0,1)\cap[1,3)=\emptyset$, ist $f$ injektiv, insbesondere ist $f:[0,\infty)\to[0,3)$ umkehrbar.

Um die Abbildungsvorschrift für $f^{-1}$ zu finden, lösen wir die Gleichung $f(x)=y$ nach $x$ auf. Dazu unterscheiden wir die Fälle $x\in[0,2)$ und $x\in[2,\infty)$. Im ersten Fall lautet die Gleichung

$$y=2x-\frac{x^2}{2}+1=3-\frac{1}{2}(x-2)^2\,.$$

Formales Auflösen nach $x$ ergibt
$$x = 2 \pm \sqrt{6-2y}\,.$$
Da $x < 2$ vorausgesetzt ist, muss das Minusvorzeichen gewählt werden.

Im Fall $x \geq 2$, gilt $xy = x - 2$ bzw.
$$x = \frac{2}{1-y}\,.$$
Insgesamt erhalten wir
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{1-y}\,, & 0 \leq y < 1\,, \\ 2 - \sqrt{6-2y}\,, & 1 \leq y < 3\,. \end{cases}$$

**Lösung zu 5:** Mit $x = \sin(t)$ folgt $\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$. Eine Substitution führt mit $\arcsin(\sin(t)) = t$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ somit auf
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\arcsin(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\,.$$
Nun wenden wir zweimal partielle Integration an und erhalten
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(t)\,\mathrm{e}^{2t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$
Also ergibt sich
$$\frac{5}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\pi}$$
bzw.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{\pi} - \frac{2}{5}\,.$$

Karlsruher Institut für Technologie

# Klausur zur Bachelorprüfung
# Höhere Mathematik I
# Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 26. Februar 2022

### Aufgabe 1

(a) Berechnen Sie die beiden Lösungen $w_{1,2} \in \mathbb{C}$ der quadratischen Gleichung

$$w^2 = 3 + 4\mathrm{i}\,.$$

(b) Nutzen Sie das Ergebnis aus Teil (a), um alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$-2\left(\sin\left(\frac{z}{2}\right)\right)^2 \;=\; \mathrm{i} \;+\; (2+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$$

zu bestimmen.

### Aufgabe 2

Die Folge $(a_n)_n$ sei rekursiv durch einen Startwert $a_0 \in [1,3]$ und die Vorschrift

$$a_{n+1} = \frac{2a_n^2 - 3a_n + 3}{a_n + 1}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $a_n \in [1,3]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Überprüfen Sie die Folge $(a_n)_n$ auf Monotonie.

(c) Begründen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert in Abhängigkeit von $a_0$.

### Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x\ln(x)} + 1\,, & x > 0\,,\\ 1\,, & x \leq 0\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f$ in $x = 0$ stetig ist.

(b) Ist die Funktion in $x = 0$ differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 4

Sei $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x+2}}$ für $x > -2$.

(a) Zeigen Sie, dass für die $k$-te Ableitung von $f$ gilt:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{3 \cdot (2k)!}{2^{2k}\,k!\,(x+2)^{\frac{2k+1}{2}}}\,, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(b) Geben Sie die Taylorreihe für $f$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ an.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.

### Aufgabe 5

Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung und berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{y(x)}{2x} + \mathrm{e}^x \arctan(\mathrm{e}^x)\sqrt{x}\,, \quad x \in [1,\infty) \;\text{ mit } y(1) = -\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^2)\,.$$

*Hinweis:* Es gilt $\int \arctan(z)\mathrm{d}z = z\arctan(z) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) + C$.

**Lösung zu 1:**

(a) Mit $w = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, folgt

$$w^2 = (x+\mathrm{i}y)^2 \;=\; x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy \;\overset{!}{=}\; 3 + 4\mathrm{i}$$

und wir erhalten durch Vergleich der Real- und Imaginärteile die beiden Gleichungen

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \text{und} \quad xy = 2\,.$$

Einsetzen von $y = \frac{2}{x}$ in die erste Gleichung liefert $x^4 - 3x^2 = 4$ mit den beiden Löungen $x^2 = -1$ und $x^2 = 4$. Da davon nur die zweite eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt, folgt $x_{1,2} = \pm 2$ und $y_{1,2} = \pm 1$. Wir erhalten die zwei Lösungen $w_1 = 2 + \mathrm{i}$ und $w_2 = -2 - \mathrm{i}$.

(b) Mit der Darstellung $\sin(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$ erhalten wir

$$\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) \;=\; \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{z}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{z}{2}}\right)^2 \;=\; -\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} - 2\right)\,.$$

Einsetzen dieser Identität und Multiplikation mit 2 führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} - 2 &= 2\mathrm{i} + (4+2\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \\ \Leftrightarrow\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 2(1+\mathrm{i}) &= (3+2\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \end{aligned}$$

Wir substituieren $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ und erhalten die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} u^2 - 2(1+\mathrm{i})u &= 3 + 2\mathrm{i} \\ \Leftrightarrow\quad \big(u - (1+\mathrm{i})\big)^2 &= 3 + 2\mathrm{i} + (1+\mathrm{i})^2 = 3 + 4\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Aus Teil (a) erhalten wir die beiden Lösungen

$$u_{1,2} = \begin{cases} (1+\mathrm{i}) + (2+\mathrm{i}) &= 3 + 2\mathrm{i}\,, \\ (1+\mathrm{i}) - (2+\mathrm{i}) &= -1\,. \end{cases}$$

Mit $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ bzw. $\mathrm{i}z = \ln(u) + 2\pi\mathrm{i}\,k = \ln|u| + \mathrm{i}\arg(u) + 2\pi\mathrm{i}\,k$ für $k \in \mathbb{Z}$ und

$$|u_1| = \sqrt{13}\,,\quad \arg(u_1) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\,,\qquad |u_2| = 1\,,\quad \arg(u_2) = \arccos(-1) = \pi$$

erhalten wir die Lösungen

$$z = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + 2k\pi - \mathrm{i}\ln(\sqrt{13}) \quad \text{und} \quad z = (1+2k)\,\pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

**Lösung zu 2:**

(a) Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion.

*Induktionsanfang:* $n = 0:$ Nach Voraussetzung gilt $1 \le a_0 \le 3$.

*Induktionsvoraussetzung:* Es gelte $a_n \in [1,3]$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.

*Induktionsschritt:* $n \to n+1$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $a_n \le 3$. Somit gilt

$$\begin{aligned} && a_n - 3 \le 0 \qquad & |\cdot 2a_n \\ &\overset{a_n \ge 1 > 0}{\Longleftrightarrow} & 2a_n^2 - 6a_n \le 0 \qquad & |+3a_n \\ &\Longleftrightarrow & 2a_n^2 - 3a_n \le 3a_n \qquad & |+3 \\ &\Longleftrightarrow & 2a_n^2 - 3a_n + 3 \le 3a_n + 3 & \\ &\Rightarrow & a_{n+1} = \frac{2a_n^2 - 3a_n + 3}{a_n + 1} \le \frac{3(a_n+1)}{a_n+1} = 3. & \end{aligned}$$

Es bleibt noch $a_{n+1} \ge 1$ zu zeigen. Umformen liefert

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{2a_n^2 - 3a_n + 3}{a_n + 1} &\overset{!}{\ge} 1 \\ \Leftrightarrow\quad 2a_n^2 - 3a_n + 3 &\ge a_n + 1 \\ \Leftrightarrow\quad 2a_n^2 - 4a_n + 2 &\ge 0 \\ \Leftrightarrow\quad 2(a_n - 1)^2 &\ge 0. \quad \checkmark \end{aligned}$$

*Alternative:* Wir zeigen, dass die Funktion $f : [1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x+1}$ monoton steigend ist und erhalten damit

$$\begin{matrix} f(x) & \le f(3) = 3 \\ f(x) & \ge f(1) = 1 \end{matrix} \quad \text{für } x \in [1,3] \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \in [1,3].$$

Es gilt

$$f'(x) = \frac{(4x-3)(x+1) - 2x^2 + 3x - 3}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 6}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)^2 - 8}{(x+1)^2} = 2 - \frac{8}{(x+1)^2}\,.$$

Für $x \in [1,3]$ erhalten wir

$$4 \le (x+1)^2 \le 16 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{16} \le \frac{1}{(1+x)^2} \le \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \le \frac{8}{(x+1)^2} \le 2$$

und somit ist

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{(x+1)^2} \ge 0 \quad \text{für } x \in [1,3].$$

Damit ist gezeigt, dass die Funktion $f$ monoton steigend ist.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2a_n^2 - 3a_n + 3}{a_n + 1} - a_n = \frac{2a_n^2 - 3a_n + 3 - a_n(a_n+1)}{a_n + 1} = \frac{a_n^2 - 4a_n + 3}{a_n + 1} \\ &= \frac{(a_n - 2)^2 - 1}{a_n + 1} \overset{a_n - 2 \in [-1,1]}{\le} 0. \end{aligned}$$

Das bedeutet, die Folge $(a_n)_n$ ist monoton fallend.

(c) Die Folge $(a_n)_n$ konvergiert nach dem Monotoniekriterium. Wir berechnen

$$\begin{aligned} a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n^2 - 3a_n + 3}{a_n + 1} &= \frac{2a^2 - 3a + 3}{a+1} \\ \Leftrightarrow\ a^2 + a = 2a^2 - 3a + 3 \ \Leftrightarrow\ a^2 - 4a + 3 = 0 \ &\Leftrightarrow\ (a-2)^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ |a-2| = 1 \ \Rightarrow\ a = 1 \text{ oder } a = 3. \end{aligned}$$

Für $a_0 \in [1,3)$ konvergiert die Folge gegen den Grenzwert $a = 1$. Für $a_0 = 3$ ist die Folge konstant 3, also gegen $a = 3$ konvergent.

**Lösung zu 3:**

(a) Damit die Funktion $f$ in $x = 0$ stetig ist, muss

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \stackrel{!}{=} f(0) = 1$$

erfüllt sein, d.h. wir haben den Grenzwert $\lim_{x\to 0+} f(x)$ zu berechnen. Mithilfe der Regel von L'Hospital bestimmen wir zunächst

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^2}{x} = 0\,.$$

Somit können wir für die Berechnung des Grenzwertes $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+2x)}{x\ln(x)}$ die Regel von L'Hospital benutzen. Es gilt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+2x)}{x\ln(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{1+2x}}{\ln(x)+1} = \lim_{x\to 0+} \frac{2}{\ln(x) + 1 + 2x\ln(x) + 2x} = 0\,.$$

Somit ist $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ und wir haben die Stetigkeit von $f$ in $x = 0$ gezeigt.

(b) Für die Differenzierbarkeit ist $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ zu berechnen. Der linksseitige Grenzwert ist 0, da $f(x) = 1$ ist für alle $x \le 0$. Für $x > 0$ ist

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{\ln(1+2x)}{x\ln(x)} + 1 - 1}{x} = \frac{\ln(1+2x)}{x^2\ln(x)}\,.$$

Da

$$\lim_{x\to 0+} x^2\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^3}{2x} = 0$$

kann erneut die Regel von L'Hospital angewendet werden. Für den Kehrwert von $\frac{\ln(1+2x)}{x^2\ln(x)}$ berechnen wir

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2\ln(x)}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x\ln(x) + \frac{x^2}{x}}{\frac{1}{1+2x}} = \lim_{x\to 0+} (1+2x)(2x\ln(x) + x) = 0.$$

Wenn der Kehrwert jedoch gegen 0 konvergiert, so muss der Bruch $\frac{\ln(1+2x)}{x^2\ln(x)}$ für $x \to 0+$ divergieren. Daher ist $f$ in $x = 0$ nicht differenzierbar.

*Achtung: Wenn wir die Regel von L'Hospital anwenden möchten, muss der Grenzwert*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}$$

*existieren. Daher können wir mit L'Hospital nur den Grenzwert des Kehrwertes berechnen.*

**Lösung zu 4:**

(a) Beweis durch vollständige Induktion:

*IA:* $k = 1$ : Wir berechnen die erste Ableitung $f'$ und zeigen damit

$$f'(x) = -\frac{3}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}} = (-1)^1 \frac{3\cdot 2!}{2^2 1!(x+2)^{\frac{2+1}{2}}}\,.$$

*IV:* Die Darstellung für $f^{(k)}$ gelte für ein $k \in \mathbb{N}$.

*IS:* $k \to k+1$ : Wir berechnen die Ableitung von $f^{(k)}$:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\ &= (-1)^k \frac{3\cdot(2k)!}{2^{2k}k!}\,(-1)\left(\frac{2k+1}{2}\right)(x+2)^{-\frac{2k+1}{2}-1} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{3\cdot(2k+1)!}{2^{2k+1}k!(x+2)^{\frac{2k+3}{2}}} \cdot \frac{2(k+1)}{2(k+1)} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{3\cdot(2k+2)!}{2^{2k+2}(k+1)!(x+2)^{\frac{2k+3}{2}}}\,. \end{aligned}$$

Damit ist die gegebene Darstellung der $k$-ten Ableitung nachgewiesen.

(b) Wir berechnen den Funktionswert und den Wert der Ableitungen am Punkt $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{3}{\sqrt{-1+2}} = 3 \\ f^{(k)}(-1) &= (-1)^k \frac{3(2k)!}{2^{2k}k!(-1+2)^{\frac{2k+1}{2}}} = (-1)^k \frac{3(2k)!}{2^{2k}k!}\,. \end{aligned}$$

Damit lautet die Taylorreihe für $f$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned} T(x;-1) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right) = \left(3 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3(2k)!}{2^{2k}k!k!}(x+1)^k\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}(x+1)^k\right)\,. \end{aligned}$$

(c) Mit dem Quotientenkriterium berechnen wir

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \left|\frac{(-1)^{k+1}3(2k+2)!(x+1)^{k+1}}{2^{2k+2}(k+1)!(k+1)!}\frac{2^{2k}k!k!}{(-1)^k 3(2k)!(x+1)^k}\right| \\ &= \left|\frac{(2k+2)(2k+1)}{2^2(k+1)^2}\right||x+1| = \left|\frac{2(k+1)(2k+1)}{4(k+1)(k+1)}\right||x+1| \\ &= \frac{2k+1}{2k+2}|x+1| \xrightarrow{k\to\infty} |x+1|.\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist $r = 1$.

**Lösung zu 5:** Es liegt ein lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung vor.

Allgemeine Lösung der linearen homogenen DGL:

Eine Stammfunktion von $a(x) = \frac{1}{2x}$ ist $A(x) = \frac{1}{2}\ln(x) = \ln(\sqrt{x})$ und die lineare homogene DGL

$$y_h'(x) = \frac{1}{2x}y_h(x)$$

besitzt somit die allgemeine Lösung $y_h(x) = C\sqrt{x},\ C \in \mathbb{R}$.

Spezielle Lösung der linearen inhomogenen DGL: Variation der Konstanten

Wir setzen den Ansatz $\hat{y}(x) = C(x)\sqrt{x}$ in die DGL ein, um eine Lösung der linearen inhomogenen DGL zu bestimmen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \hat{y}'(x) = C'(x)\sqrt{x} + C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} && = \frac{1}{2x}C(x)\sqrt{x} + \mathrm{e}^x \arctan(\mathrm{e}^x)\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow\quad & C'(x) && = \mathrm{e}^x \arctan(\mathrm{e}^x) \\ \Rightarrow\quad & C(x) && = \int \mathrm{e}^x \arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $\mathrm{e}^x = z,\ \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$ können wir das Integral berechnen,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \int \arctan(z)\mathrm{d}z &\overset{\text{Hinweis}}{=} z\arctan(z) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) + C \\ &= \mathrm{e}^x \arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x}) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Alternativ kann das Integral mithilfe partieller Integration berechnet werden

$$\int \mathrm{e}^x \arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \arctan(\mathrm{e}^x) - \int \mathrm{e}^x \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x}) + C.$$

Eine spezielle Lösung der DGL ist somit durch

$$\hat{y}(x) = \left(\mathrm{e}^x \arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x})\right)\sqrt{x}$$

gegeben.

Allgemeine Lösung der linearen inhomogenen DGL: Die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen DGL lautet

$$y(x) = \hat{y}(x) + y_h(x) = \left(\mathrm{e}^x \arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x}) + C\right)\sqrt{x}\,.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^2) = y(1) = \mathrm{e}\arctan(\mathrm{e}) - \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^2) + C \\ \Rightarrow\ & C = -\mathrm{e}\arctan(\mathrm{e}). \end{aligned}$$

Karlsruher Institut für Technologie

# Klausur zur Bachelorprüfung
# Höhere Mathematik I
# Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 2. September 2022

### Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Beträge der Lösungen der Gleichung

$$(z+1)^3 = (z-1)^3$$

in $\mathbb{C}$.

Hinweis: Betrachten Sie $w = \frac{z+1}{z-1}$ für $z \neq 1$.

### Aufgabe 2

Zeigen Sie die Abschätzungen

$$-2 \leq \frac{\ln(x^4+1)-2}{x^4+1} \leq \frac{1}{\mathrm{e}^3} \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}\,.$$

### Aufgabe 3

Gegeben sei die Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$a_n = \sqrt{n^4+n^2+1} - n^2\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Zeigen Sie Konvergenz der Folge für $n \to \infty$ und berechnen sie ihren Grenzwert.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}(x-1)^n$$

konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Folge $(a_n/n)$ monoton fallend ist.

### Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \ln(1+u)\,\mathrm{d}u\,, \qquad x > -1\,,$$

also eine Stammfunktion von $\ln(1+x)$.

(a) Zeigen Sie für die Ableitungen von $f$ die Darstellung

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\,(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} \qquad \text{für } x > -1 \quad \text{und} \quad n \geq 2\,.$$

(b) Stellen Sie die Taylorreihe von $f$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf und zeigen Sie für das Restglied $R_n$:

$$\text{Wenn} \quad 0 \leq x < 1 \quad \text{ist,} \quad \text{so gilt} \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0\,.$$

(c) Zeigen Sie

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,(n+1)\,2^n} = 3\,\ln\frac{3}{2}\,.$$

### Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(x) = 12\,\frac{\cos(2x)}{1+\sin(2x)}\,u(x) + 3\,(1+\sin(2x))^3\,\sin(x)\,\sqrt[3]{u(x)^2}\,, \quad |x| < \frac{\pi}{2}\,,$$

mit $u(0) = \frac{1}{8}$.

**Lösung zu 1:** Mit $w = \frac{z+1}{z-1}$ ergibt sich aus der Gleichung die Identität $w^3 = 1$ mit den drei Lösungen (Einheitswurzeln)

$$w_0 = 1\,, \quad w_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi} = \cos(\frac{2}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

und

$$w_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4}{3}\pi} = \cos(\frac{4}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{4}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Der Fall $w = w_0 = 1$ liefert den Widerspruch $z + 1 = z - 1$ und führt auf keine Lösung der Gleichung.

Für die anderen beiden Fälle berechnen wir

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

und weiter

$$|z| = \frac{|(w+1)(\overline{w}-1)|}{|w-1|^2} = \frac{||w|^2 - w + \overline{w} - 1|}{|w-1|^2}\,.$$

Einsetzen der beiden Lösungen $w_1$ und $w_2$ mit $|w_1| = |w_2| = 1$ und $\mathrm{Im}(w_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bzw. $\mathrm{Im}(w_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ergibt für die beiden Lösungen

$$|z_{1,2}| = \frac{2\,|\,\mathrm{Im}(w_{1,2})|}{|w_{1,2}-1|^2} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Bem.: Direkter Lösungsweg, ohne Substitution: Aus $z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = (z+1)^3 = (z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$ folgt $6z^2 + 2 = 0$ bzw. $z^2 = -\frac{1}{3}$. Also ergeben sich die beiden Lösungen $z_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}$ mit $|z_{1,2}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

**Lösung zu 2:** Der Ausdruck

$$f(x) = \frac{\ln(x^4+1) - 2}{x^4+1}$$

ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, so dass in lokalen Extremalstellen $f'(x) = 0$ gilt. Wir berechnen

$$f'(x) = \frac{\frac{4x^3}{x^4+1}(x^4+1) - 4x^3(\ln(x^4+1) - 2)}{(x^4+1)^2} = -\frac{4x^3(\ln(x^4+1) - 3)}{(x^4+1)^2}\,.$$

Aus der Bedingung $f'(x) = 0$ ergeben sich die kritischen Stellen $x_0 = 0$ oder, aus der Gleichung $3 = \ln(x^4+1)$, die Stellen $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\mathrm{e}^3 - 1}$ mit den Funktionswerten $f(x_0) = -2$ und $f(x_{1,2}) = \frac{1}{\mathrm{e}^3}$.

Weiterhin gilt mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(x^4+1) - 2}{x^4+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3}{(x^4+1)\,4x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^4+1} = 0\,.$$

Also liegt das globale Minimum der Funktion bei $x = 0$ und globale Maxima bei $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\mathrm{e}^3 - 1}$. Es ergeben sich die Abschätzungen

$$-2 = f(x_0) \le f(x) \le f(x_{1,2}) = \frac{1}{\mathrm{e}^3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Lösung zu 3:** zu(a): Wir berechnen

$$\begin{aligned}\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2 &= \frac{n^4 + n^2 + 1 - n^4}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1} + n^2} \\ &= \frac{n^2 + 1}{n^2(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} + 1)} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{n^2(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} + 1)} \to \frac{1}{2}\,, \quad n \to \infty\,,\end{aligned}$$

wobei die Konvergenz aus den Rechenregeln für Grenzwerte und den Nullfolgen $\frac{1}{n^2}$ und $\frac{1}{n^4}$ folgt.

zu (b): Mit dem Wurzelkriterium ergibt sich der Konvergenzradius $r = 1$ aus

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{n}|x-1|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{n}}|x-1| \to |x-1|\,,$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und

$$1 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2} - \varepsilon} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \varepsilon} = 1$$

gilt. Somit konvergiert die Reihe für alle $x \in (0,2)$. Die Reihe divergiert für $x < 0$ und für $x > 2$.

Wir untersuchen noch die Konvergenz an den Stellen $x = 0$ und $x = 2$. Im ersten Fall ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}(-1)^n$$

konvergent wegen des Leibnizkriteriums, da $(a_n/n)$ nach dem Hinweis eine positive, monoton fallende Nullfolge ist. Im zweiten Fall ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

divergent, denn es gibt etwa $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{4} \le a_n$ für alle $n \ge n_0$. Also ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \ge \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{a_n}{n} + \frac{1}{4}\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergent, da die harmonische Reihe divergiert.

**Lösung zu 4:** (a) Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang ist der Fall $n = 2$. Aus der Definition von $f$ folgt

$$f'(x) = \ln(1+x)\,, \qquad f''(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^2\,0!}{(1+x)^{2-1}}\,.$$

Dies ist genau die behauptete Formel für $n = 2$.

Für den Induktionsschritt setzen wir als Induktionsvoraussetzung voraus, dass die behauptete Formel für ein $n \geq 2$ richtig ist. Dann folgt für dieses $n$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n)}(x) \overset{\text{I.V.}}{=} (-1)^n \, (n-2)! \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \\ &= (-1)^n \, (n-2)! \, \frac{1-n}{(1+x)^n} = \frac{(-1)^{n+1} \, (n-1)!}{(1+x)^n} \, . \end{aligned}$$

Dies ist die behauptete Formel für $n+1$.

Es folgt dass die Formel für alle $n \geq 2$ richtig ist.

(b) Die Taylorreihe ist

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \, (x - x_0)^n = f(0) + f'(0) \, x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \, x^n \, .$$

Nach der Definition von $f$ und Teil (a) ist

$$f(0) = 0 \, , \qquad f'(0) = \ln(1) = 0 \, , \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^n \, (n-2)! \, , \quad n \geq 2 \, .$$

Somit ist

$$F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \, (n-1)} \, x^n \, .$$

Wir betrachten $x$ mit $0 \leq x < 1$. Mit einer Stelle $\xi$ zwischen $x_0 = 0$ und $x$ gilt für das Restglied nach dem Satz von Taylor

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \, x^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} \, x^{n+1}}{(n+1) \, n \, (1+\xi)^n} \, .$$

Mit $0 \leq \xi \leq x < 1$ folgt

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1) \, n \, |1+\xi|^n} \overset{x<1}{\leq} \frac{1}{(n+1) \, n \, |1+\xi|^n} \overset{\xi>0}{\leq} \frac{1}{(n+1) \, n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \, .$$

(c) Es ist

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \, (n+1) \, 2^n} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1) \, n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + 2 \, F\left(\frac{1}{2}\right) .$$

Da das Restglied gegen null konvergiert, ist $F(x) = f(x)$ für $0 \leq x < 1$, also insbesondere für $x = 1/2$. Den Funktionswert berechnen wir als

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} \ln(1+t) \, \mathrm{d}t = [(1+t) \, \ln(1+t) - t]_0^{1/2} = \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \, .$$

Somit ist der Reihenwert

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \, (n+1) \, 2^n} = 1 + 2 \left( \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) = 3 \, \ln \frac{3}{2} \, .$$

**Lösung zu 5:** Es handelt sich um eine Bernoulli'sche Differentialgleichung mit dem Exponenten $\lambda = 2/3$. Wir substituieren $u(x) = v(x)^\alpha$ mit $\alpha = 1/(1-\lambda) = 3$. Somit ist $u'(x) = 3 \, v(x)^2 \, v'(x)$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} 3 \, v(x)^2 \, v'(x) &= 12 \, \frac{\cos(2x)}{1 + \sin(2x)} \, v(x)^3 + 3 \, (1 + \sin(2x))^3 \, \sin(x) \, v(x)^2 \, , \\ v'(x) &= 4 \, \frac{\cos(2x)}{1 + \sin(2x)} \, v(x) + (1 + \sin(2x))^3 \, \sin(x) \, . \end{aligned}$$

Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung kann durch Separation gelöst werden.

$$\int \frac{v_h'(x)}{v_h(x)} \, \mathrm{d}x = 2 \int \frac{2 \cos(2x)}{1 + \sin(2x)} \, \mathrm{d}x \, ,$$

$$\begin{aligned} \ln |v_h(x)| &= 2 \ln |1 + \sin(2x)| + \tilde{C} = \ln(1 + \sin(2x))^2 + \tilde{C} \, , \\ v_h(x) &= C \, (1 + \sin(2x))^2 \, . \end{aligned}$$

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung machen wir den Ansatz $v_p(x) = C(x) \, (1 + \sin(2x))^2$. Dieser führt auf die Gleichung

$$C'(x)(1 + \sin(2x))^2 = (1 + \sin(2x))^3 \, \sin(x) \, .$$

Somit gilt (mit einem Additionstheorem für die Sinus-Funktion

$$C'(x) = (1 + \sin(2x)) \, \sin(x) = \sin(x) + 2 \, \sin^2(x) \, \cos(x) \, .$$

Eine Stammfunktion ist

$$C(x) = -\cos(x) + \frac{2}{3} \sin^3(x) \, .$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$u(x) = \left( C - \cos(x) + \frac{2}{3} \sin^3(x) \right)^3 (1 + \sin(2x))^6 \, .$$

Der Anfangswert liefert noch

$$\frac{1}{8} = u(0) = (C-1)^3 \, , \qquad \text{d.h.} \quad C = \frac{3}{2} \, .$$

Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(x) = \left( \frac{3}{2} - \cos(x) + \frac{2}{3} \sin^3(x) \right)^3 (1 + \sin(2x))^6 \, .$$

Karlsruher Institut für Technologie

# Klausur zur Bachelorprüfung
# Höhere Mathematik I
# Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 4. März 2023

**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(6-4\mathrm{i})\cos(z) = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin(z) - 5 + 6\mathrm{i} + (3-2\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\,.$$

**Aufgabe 2**

Gegeben sind Parameter $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}\right), & x \in \left(-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}\,, \\ \exp\left(-\dfrac{2}{\pi}\right) - \exp\left(\cos(2x)\right), & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right), \\ \alpha\,, & x = 0\,, \\ \beta\,, & x = \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

(a) Begründen Sie, dass $f$ auf $(-\pi, \pi) \setminus \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ für jede Wahl von $\alpha$, $\beta$ stetig ist.

(b) Kann man $\alpha$ und $\beta$ so wählen, dass $f$ in den Stellen 0 oder $\frac{\pi}{2}$ stetig ist? Geben Sie diese Wahl ggf. an.

**Aufgabe 3**

Gegeben ist die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(108)} \cdot \ln\left(\dfrac{(x+2)^3}{x-2}\right), & x > 2\,, \\ \mathrm{e}^x\,, & 0 \le x \le 2\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$f(x) \ge 1 \qquad \text{für alle } x \ge 0\,.$$

**Aufgabe 4**

Die Funktion

$$f(x) = \frac{9}{(x-3)^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}\,,$$

lässt sich auf einem Intervall $(-r, r)$ als Potenzreihe darstellen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n\,, \qquad |x| < r\,.$$

(a) Zeigen Sie: $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{2}{3}$ und

$$a_{n+2} = \frac{2}{3}\,a_{n+1} - \frac{1}{9}\,a_n\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

sowie die explizite Darstellung $a_n = \dfrac{n+1}{3^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe?

(c) Bestimmen Sie den Wert von $f^{(2023)}(0)$. (Potenzen von 3 und Fakultäten müssen nicht näher berechnet werden.)

**Aufgabe 5**

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswerproblems

$$u'(x) = \frac{2\,u(x)}{1+2x} + \frac{1}{x^2\,(1+2x)}\,(u(x))^2\,, \qquad x > 0\,,$$

mit $u(1) = \frac{1}{2}$.

**Lösung zu 1:** Wir setzen die Darstellungen der trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion in die Gleichung ein und erhalten

$$(3-2\mathrm{i})\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) - 5 + 6\mathrm{i} + (3-2\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\,.$$

Der Term $(3-2\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$ hebt sich auf beiden Seiten weg. Wir multiplizieren noch mit $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ durch,

$$(6-4\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1\right) - (10-12\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,.$$

Wir substituieren $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ und bringen alles auf eine Seite,

$$w^3 + (6-4\mathrm{i})\,w^2 + (9-12\mathrm{i})\,w = 0\,.$$

Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen besitzt, kann $w = 0$ ausgeschlossen werden. Somit verbleibt eine quadratische Gleichung,

$$w^2 + (6-4\mathrm{i})\,w + 9 - 12\mathrm{i} = 0\,,$$

die wir durch quadratisches Ergänzen lösen,

$$(w+3-2\mathrm{i})^2 = (3-2\mathrm{i})^2 - 9 + 12\mathrm{i} = 9 - 12\mathrm{i} - 4 - 9 + 12\mathrm{i} = -4\,,$$

bzw. $w = -3 + 2\mathrm{i} \pm 2\mathrm{i}$. Also haben wir die beiden Lösungen, die wir in Polarkoordinaten darstellen:

$$\begin{aligned} w_1 &= -3 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\,,\\ w_2 &= -3 + 4\mathrm{i} = 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arccos(-3/5)}\,. \end{aligned}$$

Damit können wir rücksubstituieren und die Lösungen aus $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ bestimmen:

$$z = -\mathrm{i}\,\ln(3) + (2n+1)\,\pi \quad \text{oder} \quad z = -\mathrm{i}\ln(5) + \arccos(-3/5) + 2n\pi\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

**Lösung zu 2:** (a) Alle auftretenden Funktionen sind stetig und die Nenner haben auf der Menge $(-\pi,\pi) \setminus \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ keine Nullstellen. Somit ist $f$ als Komposition stetiger Funktionen selbst stetig.

(b) Wir betrachten zunächst $\hat{x} = 0$. Wir untersuchen, ob der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)\right),$$

da die Exponentialfunktion stetig ist. Dazu wenden wir die Regel von L'Hospital an:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\,\sin(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\,\cos(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)} = 0\,.$$

Somit ist $f$ durch die Wahl $\alpha = 0$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ stetig.

Nun betrachten wir $\hat{x} = \pi/2$. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} f(x) &= \lim_{x\to\pi/2} \exp\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = \exp\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).\\ \lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}} f(x) &= \lim_{x\to\pi/2}\left[\exp\left(-\frac{2}{\pi}\right) - \exp\left(\cos(2x)\right)\right] = \exp\left(-\frac{2}{\pi}\right) - \exp\left(-1\right). \end{aligned}$$

Diese Grenzwerte sind nicht gleich, denn

$$\exp\left(1-\frac{2}{\pi}\right) = \mathrm{e}\cdot\exp\left(-\frac{2}{\pi}\right) > \exp\left(-\frac{2}{\pi}\right) > \exp\left(-\frac{2}{\pi}\right) - \frac{1}{\mathrm{e}} = \exp\left(-\frac{2}{\pi}\right) - \exp\left(-1\right).$$

Also ist $f$ in $\hat{x} = \pi/2$ für keine Wahl von $\beta$ stetig.

**Lösung zu 3:** Wir betrachten die Intervalle $[0,2]$ und $(2,\infty)$ separat.

Auf $[0,2]$ ist die Funktion streng monoton wachsend und nimmt daher ihren kleinsten Funktionswert am linken Rand an. Dieser ist $f(0) = 1$. Somit ist die Ungleichung für alle $x \in [0,2]$ erfüllt.

Auf $(2,\infty)$ betrachten wir zunächst das Verhalten in der Nähe der Intervallgrenzen. Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{\ln(108)}\left(3\,\ln(x+2) - \ln(x-2)\right) \longrightarrow \infty \quad (x\to 2)\,,$$

sowie

$$f(x) = \frac{1}{\ln(108)}\left(2\,\ln(x+2) + \ln\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right) \longrightarrow \infty \quad (x\to\infty)\,.$$

Somit gibt es Zahlen $a$, $b$ mit $2 < a < b$ und $f(x) \geq 2$ für $x \in (2,\infty)\setminus(a,b)$.

Es reicht also aus, das abgeschlossene, beschränkte Intervall $[a,b]$ zu betrachten. Als stetige Funktion nimmt $f$ hier sein Minimum an. Kandidaten dafür sind die Randpunkte $a$, $b$, sowie alle Stellen $x$ mit $f'(x) = 0$. Wir bestimmen die Ableitung mit Ketten und Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(108)}\cdot\frac{x-2}{(x+2)^3}\cdot\frac{3\,(x+2)^2\,(x-2) - (x+2)^3}{(x-2)^2} = \frac{3\,(x-2)-(x+2)}{\ln(108)\,(x-2)\,(x+2)} = \frac{2x-8}{\ln(108)\,(x^2-4)}\,.$$

Die Forderung $f'(x) \overset{!}{=} 0$ führt auf $x = 4$. Es ist

$$f(4) = \frac{1}{\ln(108)}\cdot\ln\left(\frac{6^3}{2}\right) = 1\,.$$

Da $f(a)$, $f(b) \geq 2 > 1$, muss es sich bei $x = 4$ um die Minimalstelle handeln. Es folgt

$$f(x) \geq f(4) = 1 \quad \text{für alle } x \in [a,b]\,,$$

und damit auch für alle $x \geq 0$.

**Lösung zu 4:** (a) Aus der Darstellung als Potenzreihe folgt

$$\begin{aligned} 9 &= (x-3)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = (x^2-6x+9) \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} 6\, a_n\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 9\, a_n\, x^n\,. \end{aligned}$$

Mit Indexverschiebungen ergibt sich

$$\begin{aligned} 9 &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 6\, a_{n-1}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 9\, a_n\, x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 6\, a_{n-1} + 9\, a_n)\, x^n - 6a_0 x + 9a_1 x + 9a_0\,. \end{aligned}$$

Wir führen einen Koeffizientenvergleich durch und erhalten:

$$\begin{aligned} 9 &= 9a_0 && \Longrightarrow && a_0 = 1\,, \\ 0 &= 9a_1 - 6a_0 = 9a_1 - 6 && \Longrightarrow && a_1 = \frac{2}{3}\,, \\ 0 &= a_{n-2} - 6\, a_{n-1} + 9\, a_n && \Longrightarrow && a_n = \frac{2}{3}\, a_{n-1} - \frac{1}{9}\, a_{n-2}\,, \quad n \geq 2\,. \end{aligned}$$

Dies ist die rekursive Darstellung der $a_n$, die zu zeigen war.

Die Korrektheit der expliziten Darstellung beweisen wir durch vollständige Induktion. Für $n = 0$ gilt $a_0 = 1 = (1+0)/3^0$. Ferner ist für $n = 1$ ebenfalls $a_1 = 2/3 = (1+1)/3^1$. Damit ist der Induktionsanfang erbracht.

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass die Darstellung $a_n = (n+1)/3^n$ fr $n$ und $n+1$ richtig ist. Dann folgt mit der Rekursionsvorschrift

$$a_{n+2} = \frac{2}{3}\, a_{n+1} - \frac{1}{9}\, a_n \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{2}{3}\, \frac{n+2}{3^{n+1}} - \frac{1}{9}\, \frac{n+1}{3^n} = \frac{1}{3^{n+2}}\, (2\,(n+2) - (n+1)) = \frac{n+3}{3^{n+2}}\,.$$

Damit ist auch der Induktionsschritt erbracht.

(b) Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{|x|}{3} = \frac{|x|}{3} \overset{!}{<} 1\,.$$

Die Potenzreihe konvergiert also absolut für $x \in (-3,3)$ und divergiert für $x \in \mathbb{R} \setminus (-3,3)$. Es bleibt, die Randpunkte zu untersuchen. Wir erhalten für $x = \pm 3$ die Reihen

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \right) \qquad \text{bzw.} \qquad \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, (n+1) \right).$$

In beiden Fällen konvergieren die Reihenglieder nicht gegen null, die Reihen sind also divergent. Somit konvergiert die Potenzreihe nur für $x \in (-3,3)$.

(c) Da $f$ als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ dargestellt werden kann, stimmt diese Darstellung mit der Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ überein. Somit ist $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. Also folgt

$$f^{(2023)}(0) = 2023! \cdot \frac{2023+1}{3^{2023}} = \frac{2024!}{3^{2023}}\,.$$

**Lösung zu 5:** Es handelt sich um eine Bernoulli'sche Differentialgleich mit Exponent $\alpha = 2$. Die Substitution $u(x) = v(x)^\lambda$ mit $\lambda = 1/(1-\alpha) = -1$ führt auf

$$-\frac{1}{v(x)^2}\, v'(x) = \frac{2}{1+2x}\, \frac{1}{v(x)} + \frac{1}{x^2\,(1+2x)}\, \frac{1}{v(x)^2}\,,$$

bzw. auf die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$v'(x) = -\frac{2}{1+2x}\, v(x) - \frac{1}{x^2\,(1+2x)}\,, \qquad x > 0\,.$$

Wir lösen zunähst die zugehörige homogene lineare Differentialgleich durch Separation:

$$v_h'(x) = -\frac{2}{1+2x}\, v_h(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{v_h'(x)}{v_h(x)}\, \mathrm{d}x = -\int \frac{2}{1+2x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Wir substituieren links $w = v_h(x)$, rechts $z = 1+2x$ und erhalten (beachte $x > 0$, also $z > 1$)

$$\ln|w| = -\ln z + \tilde{C} = \ln\frac{1}{z} + \tilde{C}\,,$$

bzw. nach Anwendung der Exponentialfunktion und Rücksubstitution die allgemeine Lösung

$$v_h(x) = \frac{C}{2x+1}\,, \quad x > 0\,.$$

Wir bestimmen nun eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleich durch den Ansatz $v_p(x) = C(x)/(2x+1)$ (Variation der Konstanten). Die Ableitung ist

$$v_p'(x) = \frac{C'(x)}{2x+1} - \frac{2\,C(x)}{(2x+1)^2}\,.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\frac{C'(x)}{2x+1} - \frac{2\,C(x)}{(2x+1)^2} = -\frac{2\,C(x)}{(1+2x)^2} - \frac{1}{x^2\,(1+2x)}\,,$$

oder

$$C'(x) = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Eine Stammfunktion ist $C(x) = 1/x$, wodurch wir die partikuläre Lösung

$$v_p(x) = \frac{1}{x\,(2x+1)}\,, \quad x > 0\,,$$

der inhomogenen linearen Differentialgleichung gefunden haben. Die allgemeine Lösung ist also

$$v(x) = \frac{1+Cx}{x\,(2x+1)}\,, \quad x > 0\,.$$

Die Anfangsbedingung $u(1) = 1/2$ führt auf $v(1) = 2$. Dies liefert die Gleichung

$$2 = \frac{1+C}{1\cdot 3}\,, \qquad \text{oder} \quad C = 5\,.$$

Wir führen noch die Rücksubstitution durch und erhalten die Lösung

$$u(x) = \frac{x\,(2x+1)}{1+5x}\,, \qquad x > 0\,,$$

des Anfangswertproblems für die Bernoulli'sche Differentialgleichung.

Karlsruher Institut für Technologie

# Klausur zur Bachelorprüfung
# Höhere Mathematik I
# Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

Karlsruhe, 8. September 2023

**Aufgabe 1**

Mit einem Startwert $a_0 \in (0, \frac{4}{9})$ ist die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} - \frac{a_n}{2} \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \in (0, \frac{4}{9})$.
Hinweis: Betrachten Sie $\frac{8}{9} - 2a_{n+1}$ für die obere Abschätzung.

(b) Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert dieser Folge.

**Aufgabe 2**

Es ist $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2(x)\, \ln(\cos(x))\,, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ a\,, & x = \frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion stetig ist.

(b) Zeigen Sie mit dem Wert für $a$ aus Teil (a) die Abschätzungen

$$-\frac{1}{2\mathrm{e}} \le f(x) \le 0 \quad \text{für } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,.$$

**Aufgabe 3**

Die Funktion $f : (1-r, 1+r) \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2-n-2}-n\right)^n}{n} (x-1)^n\,, \quad x \in (1-r, 1+r)\,,$$

wobei $r \ge 0$ den Konvergenzradius der Potenzreihe bezeichnet.

(a) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-n-2}-n\right)$$

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius $r$ der Potenzreihe.

(c) Berechnen Sie an der Stelle $x = 1$ die dritte Ableitung $f^{(3)}(1)$.

**Aufgabe 4**

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\sin(\mathrm{i}z) = \sin(\frac{\mathrm{i}}{2}z)\,.$$

**Aufgabe 5**

Berechnen Sie mit Substitution und partieller Integration das Integral

$$\int_a^b \frac{(\ln(x))^2}{x} \cos\big(\ln(\ln(x))\big)\, dx$$

auf dem Intervall $[a, b]$ mit $a = \mathrm{e}$ und $b = \mathrm{e}^{\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right)}$.

**Lösung zu 1:** zu (a) Wir zeigen die Aussage induktiv. Mit $a_0$ ist ein Induktionsanfang gegeben. Nehmen wir nun an, dass $0 < a_n < \frac{4}{9}$ gilt, so ergibt sich zunächst

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} - \frac{a_n}{2} = \sqrt{a_n}(1 - \frac{\sqrt{a_n}}{2}).$$

Wegen der Annahme ist $\sqrt{a_n} > 0$ und

$$1 - \frac{\sqrt{a_n}}{2} \geq 1 - \frac{1}{3} > 0.$$

Also folgt $a_{n+1} > 0$. Berechnen wir weiterhin mit quadratischer Ergänzung

$$\frac{4}{9} - a_{n+1} = \frac{4}{9} - \sqrt{a_n} + \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2}\left(a_n - 2\sqrt{a_n} + \frac{8}{9}\right) = \frac{1}{2}\left((\sqrt{a_n} - 1)^2 - \frac{1}{9}\right).$$

Aus $0 < a_n < \frac{4}{9}$ folgt $0 < \sqrt{a_n} < \frac{2}{3}$ bzw. $-1 < \sqrt{a_n} - 1 < -\frac{1}{3}$, und wir sehen $(\sqrt{a_n} - 1)^2 \in (\frac{1}{9}, 1)$. Insbesondere ergibt sich aus obiger Rechnung $\frac{4}{9} - a_{n+1} > 0$. Insgesamt haben wir $a_{n+1} \in (0, \frac{4}{9})$ gezeigt und mit Induktion folgt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

zu (b) Mit der Beschränkung $a_n \in (0, \frac{4}{9})$ aus Teil (a) erhalten wir

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n} - \frac{3}{2}a_n = \sqrt{a_n}\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{a_n}\right) > 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend, und das Montoniekriterium liefert Konvergenz der Folge.

zu (c) Aus der Fixpunktgleichung

$$a = \sqrt{a} - \frac{a}{2}$$

für den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ der Folge berechnen wir

$$\frac{3}{2}a = \sqrt{a} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a} = \frac{2}{3},$$

da aufgrund der Monotonie der Folge $(a_n)$ für den Grenzwert $a \neq 0$ gelten muss. Also ist $a = \frac{4}{9}$ der gesuchte Grenzwert.

**Lösung zu 2:** zu (a) Für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ ist $f$ als Produkt stetiger Funktionen auch stetig. Für die Stetigkeit in $x = \frac{\pi}{2}$ betrachten wir mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\ \ln(\cos(x)) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos(x))}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{\cos(x)}\sin(x)}{\frac{2}{\cos^3(x)}\sin(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\cos^2(x) \ = \ 0.$$

Also ist $f$ stetig auf $[0, \frac{\pi}{2}]$, wenn $a = 0$ gesetzt wird.

zu (b) Da $\cos(x) \geq 0$ und $\ln(\cos(x)) \leq 0$ auf $[0, \frac{\pi}{2})$ ist, ergibt sich die Abschätzung $f(x) \leq 0$ auf dem Intervall.

Weiterhin genügt es wegen $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ für die Abschätzung nach unten Minimalstellen von $f$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ zu bestimmen. Wir berechnen kritische Punkte aus

$$0 = f'(x) = -\cos(x)\sin(x)\big(2\ln(\cos(x)) + 1\big).$$

Die einzige Nullstelle der Ableitung im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ ergibt sich aus $\ln(\cos(\hat{x})) = -\frac{1}{2}$. Also liegt in $\hat{x} = \arccos(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$ ein Minimum und wir erhalten

$$f(x) \geq f(\hat{x}) = \mathrm{e}^{-1}\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

**Lösung zu 3:** zu (a) Es gilt mit der dritten Binomischen Formel

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{n^2 - n - 2} - n\right) &= \frac{\left(\sqrt{n^2 - n - 2} - n\right)\left(\sqrt{n^2 - n - 2} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2 - n - 2} + n\right)} \\ &= \frac{n^2 - n - 2 - n^2}{\left(n\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} + n\right)} \\ &= \frac{-1 - \frac{2}{n}}{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} + 1\right)} \to -\frac{1}{2} \quad \text{für } n \to \infty.\end{aligned}$$

zu (b) Wir berechnen den Konvergenzradius mit Hilfe des Wurzelkriteriums: Mit dem Resultat aus Teil (a) und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\left(\sqrt{n^2 - n - 2} - n\right)^n}{n}(x-1)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sqrt{n^2 - n - 2} - n\right|}{\sqrt[n]{n}}|x - 1| = \frac{1}{2}|x - 1|$$

Daraus ergibt sich der Konvergenzradius $r = 2$.

zu (c) Da $f$ durch eine Potenzreihe gegeben ist, ist diese identisch mit der Taylorreihe zu $f$ um $x_0 = 1$ und ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\frac{f^{(3)}(1)}{3!} = \left.\frac{\left(\sqrt{n^2 - n - 2} - n\right)^n}{n}\right|_{n=3} = \frac{(-1)^3}{3}.$$

Also erhalten wir

$$f^{(3)}(1) = -2.$$

**Lösung zu 4:** Mit der Euler'schen Formel erhalten wir aus der Gleichung die Identität

$$\frac{\mathrm{e}^{-z} - \mathrm{e}^{z}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{z}{2}}}{2\mathrm{i}}.$$

Mit der Sustitution $u = \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}$ ergibt sich nach Multiplikation mit $u^2$ die Gleichung

$$u^4 - u^3 + u - 1 = 0.$$

Offensichtlich sind $u_{1,2} = \pm 1$ Lösungen dieser Gleichung und mit der Faktorisierung

$$\begin{array}{l}
u^4 - u^3 + u - 1 \qquad = (u^2-1)(u^2-u+1) \\
\underline{u^4 - u^2} \\
\quad -u^3 + u^2 + u - 1 \\
\quad \underline{-u^3 + u} \\
\qquad u^2 - 1 \\
\qquad \underline{u^2 - 1} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

ergeben sich weitere Lösungen aus $u^2 - u + 1 = (u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0$. Die Quadratische Ergänzung führt auf

$$u_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \quad \text{und} \quad u_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Um alle Lösungen der ursprünglichen Gleichung zu bestimmen, betrachten wir für $j = 1, \ldots, 4$ die Umkehrungen

$$-\frac{z}{2} = \ln(u_j) + 2\pi n\,\mathrm{i}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Mit dem komplexen Logarithmus erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\ln(u_1) = \ln(1) = 0\,, \quad \ln(u_2) = \ln(-1) = 0 + \mathrm{i}\pi\,, \\
&\ln(u_3) = \ln(|u_3|) + \mathrm{i}\arg(u_3) = 0 + \mathrm{i}\frac{\pi}{3}\,, \quad \ln(u_4) = 0 - \mathrm{i}\frac{\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergeben sich alle Lösungen zu

$$z \in \left\{ 4n\pi\,\mathrm{i}, -\frac{2\pi}{3}\mathrm{i} + 4n\pi\,\mathrm{i}, 2\pi\mathrm{i} + 4n\pi\,\mathrm{i}, \frac{2\pi}{3}\mathrm{i} + 4n\pi\,\mathrm{i} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Lösung zu 5:** Zunächst substituieren wir $u = \ln(x)$ und erhalten mit $du = \frac{1}{x}dx$ das Integral

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}})}} \frac{(\ln(x))^2}{x} \cos\big(\ln(\ln(x))\big)\,dx = \int_1^{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} u^2 \cos(\ln(u))\,du\,.$$

Das Integral auf der rechten Seite integrieren wir zweimal partiell. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} u^2 \cos(\ln(u))\,du &= \frac{1}{3}u^3\cos(\ln(u))\Big|_1^{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} u^2 \sin(\ln(u))\,du \\
&= \frac{1}{3}u^3\cos(\ln(u))\Big|_1^{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{3}u^3\sin(\ln(u))\Big|_1^{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} \\
&\qquad - \frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} u^2\cos(\ln(u))\,du\Big]\,.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\frac{10}{9}\int_1^{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} u^2 \cos(\ln(u))\,du = u^3\left(\frac{1}{3}\cos(\ln(u)) + \frac{1}{9}\sin(\ln(u))\right)\Big|_1^{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{3}\,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}} \frac{(\ln(x))^2}{x}\cos(\ln(\ln(x)))\,dx = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{3}{10}\,.$$

**Alternative:** Die Substitution $u = \ln(\ln(x))$ mit $du = \frac{1}{x\ln(x)}dx$ führt auf

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}})}} \frac{(\ln(x))^2}{x}\cos\big(\ln(\ln(x))\big)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{3u}\cos(u)\,du\,.$$

Auch bei dieser Variante hilft zweimal partiell Integrieren weiter, und es ergibt sich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{3u}\cos(u)\,du = \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}} - 3 - 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{3u}\cos(u)\,du\,.$$

Das Ergebnis bestimmen wir wie oben.

Karlsruher Institut für Technologie

# Klausur zur Bachelorprüfung
# Höhere Mathematik I
# Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

Karlsruhe, 2. März 2024

### Aufgabe 1

Rekursiv ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(n\,a_n + \frac{1}{n+1}\right) \quad \text{mit } a_1 = 1\,.$$

(a) Zeigen Sie $\frac{1}{n} \le a_n \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert.

(c) Begründen Sie, dass es sich um eine Nullfolge handelt. Zeigen Sie dazu zunächst die Darstellung

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$$

und dann die Abschätzung

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j}\right) \le \frac{k}{n} + \frac{1}{k} \quad \text{für } 1 \le k \le n\,.$$

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\tan(z) = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}\,.$$

### Aufgabe 3

(a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$ .

(b) Zeigen Sie, für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : (-2\pi, 2\pi) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\,\ln(1-\cos(x))\,, & x \in (-2\pi, 2\pi)\setminus\{0\} \\ c\,, & x = 0\,, \end{cases}$$

stetig ist. Hinweis: Teilaufgabe (a) lässt sich verwenden.

(c) Gibt es im Intervall $(0, 2\pi)$ eine Lösung der Gleichung

$$\sqrt{x}\,\ln\big(1-\cos(x)\big) = \frac{1}{2}\ ?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f : (0,4) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$$

und den Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\left(\frac{1}{(4-x)^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\right)\,, \quad x \in (0,4),\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Stellen Sie die Taylorreihe zu $f$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ auf, und berechnen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe. Für welche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe.

### Aufgabe 5

Bestimmen Sie im Intervall $(0,1]$ die Lösung zum Anfangswertproblem

$$\frac{v'(x)}{x^3} + \frac{\ln(x^2)}{v(x)} = 0$$

mit $v(1) = \frac{1}{2}$.

**Lösung zu 1:** zu (a): Wir zeigen die Schranken durch vollständige Induktion. Mit $a_1 = 1 \in \{1\}$ ist ein Induktionsanfang gegeben.

Nehmen wir nun an, dass $a_n \in [\frac{1}{n}, 1]$ ist, so folgt

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{n}{n+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n+1}\,.$$

Weiterhin gilt

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)+1}{(n+1)^2} \leq \frac{n(n+1)+n+1}{(n+1)^2} = 1\,.$$

Also ergibt sich $\frac{1}{n+1} \leq a_{n+1} \leq 1$ und die Induktion ist abgeschlossen.

zu (b): Aus

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n}{n+1}a_n + \frac{1}{(n+1)^2} - a_n = \frac{-1}{n+1}a_n + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{n(n+1)} \ < \ 0 \end{aligned}$$

folgt, dass die Folge streng monoton fällt. Zusammen mit der Beschränktheit aus Teil (a) liefert das Monotoniekriterium Konvergenz von $(a_n)$.

zu (c): Die Behauptung $a_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$ zeigen wir induktiv. Der Induktionsanfang mit $a_1 = 1$ ist offensichtlich erfüllt. Der Induktionsschritt ergibt sich aus

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(na_n + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j}\,.$$

Nun erhalten wir für jedes $k < n$ die angegebene Abschätzung aus

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j}\right) \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{k}1\right) + \frac{1}{n}\left(\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{k}\right) \leq \frac{k}{n} + \frac{n}{n\,k}\,.$$

Bezeichnen wir den Grenzwert mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, so ist

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\,.$$

Da diese Abschätzung für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich $a = 0$.

**Lösung zu 2:** Mit den Euler Formeln erhalten wir

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\,.$$

Eine Substitution $u = e^{iz}$ führt auf die quadratische Gleichung

$$u^2 - 1 = i\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)(u^2+1)$$

bzw.

$$u^2 = \frac{1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i}{1 - \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i} = \frac{(\frac{9}{5} + \frac{3}{5}i)(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i)}{\frac{1}{25} + \frac{9}{25}} = 3i\,.$$

Mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $u = x + iy$ ergeben sich aus $u^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3i$ die beiden Gleichungen $x^2 = y^2$ und $2xy = 3$ mit den Lösungen $x = y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Also ist $u = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\,(1 + i)$.

Mit Polarkoordinatendarstellung erhalten wir die beiden Möglichkeiten

$$u = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \text{und} \quad u = -\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\,.$$

Setzen wir $z = a + ib$, so folgen aus $u = e^{iz} = e^{-b}(\cos(a) + i\sin(a))$ die Gleichungen

$$e^{-b} = \sqrt{3} \quad \text{und} \quad a = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Damit sind die Lösungen der Gleichung gegeben durch die Menge

$$\left\{z = \frac{\pi}{4} + \pi n - i\ln(\sqrt{3}) : n \in \mathbb{Z}\right\}\,.$$

**Lösung zu 3:** zu (a) Da sowohl jeweils Zähler und Nenner in $x = 0$ den Wert Null haben, lässt sich die Regel von L'Hospital zweimal anwenden. Es ergibt sich

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to0}\frac{\sin(x) + x\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to0}\frac{2\cos(x) - x\sin(x)}{\cos(x)} = 2\,.$$

zu (b) Die Funktion ist stetig, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to0} f(x) = c$ gilt, da die Funktion in den Intervallen $(-2\pi, 0)$ und $(0, 2\pi)$ als Produkt stetiger Funktionen stetig ist.

Für den Fall $x > 0$ nutzen wir nochmal die Regel von L'Hospital und bekommen mit dem Grenzwert aus Teil (a)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0}\sqrt{x}\ln(1-\cos(x)) &= \lim_{x\to0}\frac{\ln(1-\cos(x))}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \\ &= -2\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x^{-\frac{3}{2}}(1-\cos(x))} = -2\lim_{x\to0}(\sqrt{x})\lim_{x\to0}\frac{x\sin(x)}{(1-\cos(x))} = 0\,. \end{aligned}$$

Analog folgt der Grenzwert für $x < 0$. Somit ist die Funktion stetig, wenn $c = 0$ gesetzt wird.

zu (c): Es gilt

$$f(\pi) = \sqrt{\pi}\ln(1-\cos(\pi)) = \sqrt{\pi}\ln(2) \geq \ln(2) \geq \frac{1}{2}\,;$$

denn $4 \geq e$ impliziert $2 \geq \sqrt{e}$ und somit $\ln(2) \geq \frac{1}{2}$, da sowohl $\sqrt{x}$ als auch $\ln(x)$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ monoton steigend sind.

Damit und mit $f(0) = 0$ liefert der Zwischenwertsatz, dass es eine Lösung der Gleichung $\sqrt{x}\ln(1-\cos(x)) = \frac{1}{2}$ gibt.

**Lösung zu 4:**

Für die Taylorreihe um $x_0 = 2$ gilt mit $f(2) = 0$

$$\begin{aligned} T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-2)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} \left(2^{-n} + (-1)^{n-1}2^{-n}\right)(x-2)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+1)!} \left(2^{-(2k+1)} + 2^{-(2k+1)}\right)(x-2)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \frac{1}{4^k}(x-2)^{2k+1}. \end{aligned}$$

Um den Konvergenzradius zu ermitteln, betrachten wir

$$\left| \frac{\frac{1}{2k+3}\frac{1}{4^{(k+1)}}(x-2)^{2k+3}}{\frac{1}{2k+1}\frac{1}{4^k}(x-2)^{2k+1}} \right| = \frac{(2k+1)}{(2k+3)} \frac{1}{4}|x-2|^2 \;\to\; \frac{1}{4}|x-2|^2$$

für $k \to \infty$. Das Quotientenkriterium liefert für absolute Konvergenz die Bedingung $\frac{1}{4}|x-2|^2 < 1$ bzw. $|x-2| < 2$. Insgesamt ergibt sich der Konvergenzradius $r = 2$.

Somit konvergiert die Reihe absolut im Intervall $(0,4)$, und sie ist divergent für $x \notin [0,4]$. Für die beiden Randpunkte $x = 0$ und $x = 4$ ergibt sich

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \frac{1}{4^k} (\mp 2)^{2k+1} \right) = \left( \mp 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \right).$$

Die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k}, \quad \text{für jedes } N \in \mathbb{N},$$

impliziert Divergenz der Taylorreihe in den beiden Randpunkten aufgrund der Divergenz der harmonischen Reihe.

**Lösung zu 5:** Es handelt sich um eine separable Differentialgleichung, die wir trennen können zu

$$v'(x)\,v(x) = -x^3 \ln(x^2).$$

Eine Stammfunktion auf der linken Seite erhalten wir durch Substitution:

$$\int v'(x)v(x)\,dx = \int v\,dv = \frac{1}{2}v^2(x).$$

Bemerkung: Alternativ lässt sich die DGL als Bernoulli DGL auffassen. Mit dem Ansatz $u(x) = (v(x))^{\frac{1}{2}}$ ergibt sich $u'(x) = -2x^3\ln(x^2)$ und die folgende Integration liefert $u$ bzw. $v^2$.

Wir berechnen mit einer Subsitution $u = x^2$ und partieller Integration

$$\begin{aligned} -\int x^3 \ln(x^2)\,dx &= -\frac{1}{2}\int u \ln(u)\,du \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u^2\ln(u) - \frac{1}{2}\int u^2 \frac{1}{u}\,du\right] \\ &= \frac{1}{8}u^2\left(1 - 2\ln(u)\right) + c \;=\; \frac{1}{8}x^4\left(1 - 2\ln(x^2)\right) + c \end{aligned}$$

alle Stammfunktionen mit Integrationskonstanten $c \in \mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir formal die allgemeinen Lösungen

$$v(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{4}x^4(1 - 2\ln(x^2)) + 2c}.$$

Aus der Bedingung $v(1) = \frac{1}{2}$ ergibt sich $c = 0$ und das positive Vorzeichen für die gesuchte Lösung

$$v(x) = \frac{1}{2}x^2\sqrt{(1 - 2\ln(x^2))}.$$

Karlsruher Institut für Technologie

# Klausur zur Bachelorprüfung
# Höhere Mathematik II
# Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

Karlsruhe, 2. September2024

**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die die folgende Gleichung erfüllen,

$$\big(4\cos^2(z) - 3\big)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = \mathrm{i}\,.$$

**Aufgabe 2**

Die Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ in $\mathbb{R}$ sind rekursiv gegeben durch $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ und

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + b_n\,, \\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n\,, \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist die Folge $(c_n)$ definiert durch $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

(a) Begründen Sie, warum $(a_n)$ und $(b_n)$ divergieren.

(b) Zeigen Sie die Rekursion $c_{n+1} = \frac{2c_n+1}{c_n+2}$ und die Abschätzungen $0 \le c_n \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Ist die Folge $(c_n)$ konvergent ? Beweisen Sie ihre Antwort. Wenn ja, berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} c_n$.

**Aufgabe 3**

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(2x-2)^{3n+1}\right).$$

**Aufgabe 4**

Berechnen Sie eine Lösung $u : \mathbb{R}_{\ge 1} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$u'(x) + \frac{2u(x)}{x} - \mathrm{e}^x \sqrt{u(x)} = 0$$

mit $u(1) = \frac{1}{4}$.

**Aufgabe 5**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + ax + b\,, & x \le 0\,, \\ (1+x)^{\frac{1}{x}}\,, & x > 0\,, \end{cases}$$

mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $f$ auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist.

(b) Begründen Sie, dass $f$ mit den Parametern $a, b$ aus Teil (a) im Intervall $(-1, 1)$ ein Maximum besitzt (Hinweis: $\mathrm{e} \approx 2.7$).

**Lösung zu 1:** Einsetzen des Kosinus in die Gleichung ergibt

$$4\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)^2 - 3 = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}$$

bzw.

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z} - 1 - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z} = 0\,.$$

Setzen wir $u = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}$, so ergibt sich die quadratische Gleichung

$$u^2 - u + (1-\mathrm{i}) = 0\,.$$

Quadratische Ergänzung führt auf

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} + \mathrm{i}\,.$$

Wir berechnen die Wurzeln der rechten Seite. Mit dem Ansatz $(x+\mathrm{i}y)^2 = -\frac{3}{4}+\mathrm{i}$ ergeben sich aus Real- und Imaginärteil die beiden Gleichungen

$$2xy = 1\,, \quad x^2 - y^2 = -\frac{3}{4}\,.$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite liefert die reelle quadratische Gleichung $y^4 - \frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{4} = 0$, und wir berechnen die Lösungen $y^2 = 1$ oder $y^2 = -\frac{1}{4}$. Da $y$ reell ist, kommt nur die erste Lösung in Betracht. Also sind $(x+\mathrm{i}y) = \pm(\frac{1}{2}+\mathrm{i})$ die beiden möglichen Wurzeln und wir erhalten

$$u = 1+\mathrm{i} \quad \text{oder} \quad u = -\mathrm{i}\,.$$

Mit $z = a + \mathrm{i}b$ ergeben sich somit Lösungen der Gleichung durch

$$\mathrm{e}^{-2b}\left(\cos(2a) + \mathrm{i}\sin(2a)\right) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = \begin{cases} -\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i}\,. \end{cases}$$

Im ersten Fall ergibt sich $\mathrm{e}^{-2b} = |-\mathrm{i}| = 1$ und $2a = \arg(-\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ bzw.

$$b = 0 \quad \text{und} \quad a = \left(\frac{3}{4}+n\right)\pi\,,\ n\in\mathbb{Z}\,.$$

Im zweiten Fall erhalten wir aus $\mathrm{e}^{-2b} = |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ und $2a = \arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ bzw.

$$b = -\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}\ln(2) \quad \text{und} \quad a = \left(\frac{1}{8}+n\right)\pi\,,\ n\in\mathbb{Z}\,.$$

Damit haben wir alle Lösungen der Gleichung

$$z = \left(\frac{3}{4}+n\right)\pi \quad \text{oder} \quad z = \left(\frac{1}{8}+n\right)\pi - \frac{\mathrm{i}}{4}\ln(2)$$

mit $n\in\mathbb{Z}$ bestimmt.

**Lösung zu 2:** zu (a) Um Divergenz der Folgen zu sehen lässt sich das Minorantenkriterium nutzen, indem wir induktiv $a_n, b_n \geq 2^{n-1}$ zeigen. Mit $a_1 = 1$ und $b_1 = 2$ ist ein Induktionsanfang gegeben. Mit der Induktionsannahme $a_n, b_n \geq 2^{n-1}$ ist durch

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \geq 2a_n \geq 2\cdot 2^{n-1} = 2^n$$

und analog für $b_n$ der Induktionsschritt gegeben.

zu (b) Auch diese Aussage zeigen wir induktiv. Mit $c_1 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{2} \in [0,1]$ ist der Induktionsanfang offensichtlich. Für einen Induktionsschritt berechnen wir die Rekursionsformel

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2a_n + b_n}{a_n + 2b_n} == \frac{2\frac{a_n}{b_n}+1}{\frac{a_n}{b_n}+2} = \frac{2c_n+1}{c_n+2}\,,$$

wobei $b_n \neq 0$ wegen Teilaufgabe (a) gilt. Machen wir nun die Indutkionsannahme, dass $c_n \in [0,1]$ gilt, so folgt offensichtlich $c_{n+1} > 0$ und aus $c_n - 1 \leq 0$ ergibt sich $2c_n - c_n + 1 - 2 \leq 0$ bzw. $2c_n + 1 \leq c_n + 2$. Also ist

$$c_{n+1} = \frac{2c_n+1}{c_n+2} \leq 1\,.$$

Insgesamt erhalten wir durch die Induktion $0 \leq c_n \leq 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

*Alternative zur Abschätzung in der Induktion:* Betrachten wir die rationale Funktion mit $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ auf dem Intervall $[0,1]$, so ergibt sich mit der Ableitung $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$, dass $f$ monton steigend ist. Damit folgt $\frac{1}{2} = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1$ und wir erhalten in der obigen Induktion aus $c_n \in [0,1]$ auch $c_{n+1} \in [0,1]$.

zu (c) Mit dem Montoniekriterium ergibt sich Konvergenz der Folge $(c_n)$, wenn wir noch Monotonie zeigen, da die Folge nach Teil (b) beschränkt ist. Die Folge ist monoton steigend, was aus

$$c_{n+1} - c_n = \frac{2c_n - 1 - c_n(c_n+2)}{c_n+2} = \frac{1-c_n^2}{c_n+2} \geq 0$$

folgt.

Den Grenzwert $c = \lim_{n\to\infty} c_n$ berechnen wir aus der Fixpunktgleichung

$$c = \frac{2c+1}{c+2} \quad \text{bzw.} \quad c(c+2) - (2c+1) = c^2 - 1 = 0$$

und erhalten $c = 1$, da $c_n \geq 0$ und somit auch $c \geq 0$ gilt.

**Lösung zu 3:** Wir können etwa das Quotientenkriterium nutzen. Betrachten wir

$$\begin{aligned}\frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}|2x-2|^{3n+4}}{\frac{n}{n^2+1}|2x-2|^{3n+1}} &= \frac{n+1}{n}\,\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}|2x-2|^3 \\ &= (1+\frac{1}{n})\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}|2x-2|^3 \\ &\to 8\,|x-1|^3\,, \quad n\to\infty\,.\end{aligned}$$

Das Quotientenkriterium greift, wenn der letzte Ausdruck kleiner Eins, also wenn $|x-1| < \frac{1}{2}$ gilt. Somit ist der Konvergenzradius $r = \frac{1}{2}$ und die Potenzreihe konvergiert für $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Ausserdem ist die Reihe divergent für $x \notin [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Für die Randpunkte $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{3}{2}$ erhalten wir die Reihen

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(-1)^{3n+1}\right) = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}}(-1)^n\right)$$

bzw.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(1)^{3n+1}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

Mit $\frac{1}{n+\frac{1}{n}} \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ für $n > 0$ ergibt sich mit dem Leibnizkriterium Konvergenz im ersten Fall. Im zweiten Fall ist die Reihe divergent, da die divergente harmonische Reihe, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, eine Minorante liefert.

Insgesamt folgt, dass die Reihe für $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ konvergiert und sonst divergiert.

**Lösung zu 4:** Es handelt sich um eine Bernoulli Differentialgleichung. Wir substituieren $v(x) = (u(x))^{\frac{1}{2}}$ und erhalten aus

$$\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u' + \frac{1}{x}u^{\frac{1}{2}} - \frac{e^x}{2} = 0$$

die lineare Differentialgleichung

$$v'(x) + \frac{1}{x}v(x) - \frac{e^x}{2} = 0\,.$$

Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$\frac{v_0'(x)}{v_0(x)} = -\frac{1}{x}\,.$$

Integration dieser separblen DGL ergibt

$$\ln(|v_0(x)|) = -\ln(|x|) + \tilde{c}\,, \quad \text{bzw.} \quad v_0(x) = \frac{c}{x}\,.$$

Für Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung machen wir den Ansatz $v(x) = c(x)\frac{1}{x}$ und erhalten nach Einsetzen in die Gleichung

$$c'(x) = \frac{x\,e^x}{2}\,.$$

Partielle Integration führt auf

$$c(x) = \frac{1}{2}\int x\,e^x\,dx = \frac{1}{2}x\,e^x - \frac{1}{2}\int e^x\,dx = \frac{1}{2}(x-1)e^x + k\,.$$

Also bekommen wir

$$v(x) = \frac{x-1}{2x}e^x + \frac{k}{x}\,.$$

Mit der Anfangsbedingung $u(1) = \frac{1}{4}$ gilt $v(1) = \frac{1}{2}$, und wir erhalten $k = \frac{1}{2}$. Insgesamt ergibt sich die Lösung

$$v(x) = \frac{1}{2}\left((1-\frac{1}{x})e^x + \frac{1}{x}\right)$$

und somit ist

$$u(x) = \frac{1}{4}\left((1-\frac{1}{x})e^x + \frac{1}{x}\right)^2.$$

Bem.: Die ebenso möglich Substitution mit $v(x) = -\sqrt{u(x)}$ führt analog auf dieselbe Lösung.

**Lösung zu 5:** Für $x > 0$ und für $x < 0$ bestehen beide Zweige aus Kombinationen stetig differenzierbarer Funktionen, und somit ist die Funktion in Stellen $x \neq 0$ stetig differenzierbar.

Weiterhin gilt

$$\lim_{x\to 0, x>0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0, x>0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e\,;$$

denn mit der Regel von L'Hospital ist

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$$

und die exp-Funktion ist stetig. Also gilt $\lim_{x>0, x\to 0} f(x) = e$. Mit $\lim_{x\to 0, x<0}(-2x^2+ax+b) = b$ folgt $b = e$.

Für die Ableitung der Funktion mit $x > 0$ gilt

$$f'(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\left(\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\right)$$

Mit zweimaliger Anwendung der Regel von L'Hospital erhalten wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{(1+x)(2+6x)} = -\frac{1}{2}\,.$$

Also folgt $\lim_{x\to 0, x>0} f'(x) = -\frac{e}{2}$. Auf dem Zweig mit $x < 0$ ist $\lim_{x\to 0, x<0} f'(x) = \lim_{x\to 0} -4x + a = a$. Die Funktion ist somit stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$, wenn wir $a = -\frac{e}{2}$ und $b = e$ setzen.

zu (b) Mit Teilaufgabe (a) ist $f$ auf dem kompakten Intervall $[-1, 1]$ insbesondere stetig. Also besitzt $f$ eine Maximalstelle $x_{\max} \in [-1, 1]$. Da mit $f(-1) = \frac{3}{2}e - 2 < e$, $f(1) = e^{\ln 2} = 2 < e$ und $f(0) = e$ an den Randpunkten $x = -1$ und $x = 1$ kein Maximum der Funktion ist, folgt $x_{\max} \in (-1, 1)$ liegt im Inneren des Intervalls.