Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik I
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 10. September 2020

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \mathrm{e}^{2z} - (1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{z} + 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-z} + \mathrm{i} - 2\,.$$

(a) Überprüfen Sie, dass mit $z = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$ eine Nullstelle von f gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

Aufgabe 2

Die Folge (a_n) ist für $a_0 \geq -3$ rekursiv gegeben durch

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} - 1\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(a) Zeigen Sie: im Fall $a_0 \leq 1$ ist $a_n \in [-1, 1]$ und im Fall $a_0 \geq 1$ ist $a_n \geq 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Begründen Sie, dass die Folge für jeden Wert $a_0 \geq -3$ konvergiert.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge für $a_0 \geq -3$.

Aufgabe 3

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}} \quad \text{für } x \neq \pm\frac{\pi}{2}\,,$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

(a) Bestimmen Sie die Linearisierung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu f, d.h.

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = -\frac{1}{4}$ eine Lösung besitzt.

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} n\,a^n = 0$ für jedes $a \in (0, 1)$.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \mathrm{e}^{-nx^2}}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^n + n} \left| x - \frac{\pi}{2} \right|^{\frac{n}{2}}$$

konvergiert.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\cos(\tan(x))}{\cos^2(x)}\, \mathrm{e}^{-\tan(x)}$$

und berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{a \to \frac{\pi}{2}} \int_0^a f(x)\,dx\,.$$

Lösung zu 1: (a) Wir erhalten mit der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{2}\mathrm{i}) &= \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} - (1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} + (\mathrm{i}-2) + 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \\ &= -1 - (1+\mathrm{i})(\mathrm{i}) + (\mathrm{i}-2) + 2\mathrm{i}(-\mathrm{i}) = -1 - \mathrm{i} + 1 + \mathrm{i} - 2 + 2 = 0\,. \end{aligned}$$

(b) Die Substitution $w = \mathrm{e}^z$ liefert

$$w^3 - (1+\mathrm{i})w^2 + (\mathrm{i}-2)w + 2\mathrm{i} = 0\,.$$

Mit der Nullstelle $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$ aus Teil (a) ergibt sich mit Polynomdivision

$$\begin{array}{l} w^3 - (1+\mathrm{i})w^2 + (\mathrm{i}-2)w + 2\mathrm{i} \; = (w-\mathrm{i})(w^2 - w - 2) \\ \underline{w^3 - \quad \mathrm{i}\,w^2} \\ \quad -w^2 + (\mathrm{i}-2)w + 2\mathrm{i} \\ \quad \underline{-w^2 + \quad \mathrm{i}\,w} \\ \qquad\quad -2\,w + 2\mathrm{i} \\ \qquad\quad \underline{-2\,w + 2\mathrm{i}} \\ \qquad\qquad 0 \end{array} \,.$$

Wir berechnen noch die beiden Nullstellen $w = -1$ und $w = 2$ aus $w^2 - w - 2 = (w - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$. Rücksubstitution liefert die Nullstellen:

$$\begin{aligned} w = \mathrm{i} \quad &\rightsquigarrow \quad z = (\frac{\pi}{2} + 2\pi n)\,\mathrm{i} \\ w = -1 \quad &\rightsquigarrow \quad z = (1+2n)\pi\,\mathrm{i} \\ w = 2 \quad &\rightsquigarrow \quad z = \ln(2) + 2\pi n\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Lösung zu 2: (a) Wir zeigen die beiden Behauptungen induktiv.

(i) Ist $a_0 \in [-3, 1]$, so ist $0 \leq 3 + a_0 \leq 4$, und mit der Monotonie der Wurzel ergibt sich der Induktionsanfang $-1 \leq \sqrt{3+a_0} - 1 = a_1 \leq 1$. Analog folgt aus $-1 \leq a_n \leq 1$ der Induktionsschritt

$$-1 \leq \sqrt{3+a_n} - 1 = a_{n+1} \leq 1$$

für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Im anderen Fall, $a_0 \geq 1$, ergibt sich sowohl der Induktionsanfang als auch der Induktionsschritt mit $a_n \geq 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$ aus

$$a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} - 1 \geq \sqrt{4} - 1 \geq 1\,.$$

(b) Mit der dritten binomischen Formel erhalten wir

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{3+a_n} - (1+a_n) = \frac{3 + a_n - (1+a_n)^2}{\sqrt{3+a_n} + (1+a_n)} = \frac{2 - a_n - a_n^2}{\sqrt{3+a_n} + (1+a_n)}\,.$$

Da der Nenner für $a_n \geq -1$ stets positiv ist, ergibt sich aus der Faktorisierung $2 - a_n - a_n^2 = -(a_n - 1)(a_n + 2) \geq 0$ im Fall (i) mit $a_n \in [-1, 1]$ eine monoton steigende Folge und im Fall (ii) mit $a_n \geq 1$ eine monoton fallende Folge. In beiden Fällen liefert das Monotniekriterium mit der Beschränkung $a_n \in [-1, 1]$, bzw. $a_n \in [1, a_1]$ im zweiten Fall, die Konvergenz der Folge.

(c) Aus der Fixpunktgleichung $a = \sqrt{3+a} - 1$ folgt

$$a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2) = 0$$

und somit ist mit dem einzigen Fixpunkt $a = 1 \geq -1$ in beiden Fällen der Grenzwert der Folge (a_n) gegeben.

Lösung zu 3: (a) Zunächst berechnen wir mit der Regel von L'Hospital den Funktionswert in x_0 zu

$$f(x_0) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{\pi}\,.$$

Die Ableitung zu f für $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$ ist

$$f'(x) = \frac{-(x^2 - \frac{\pi^2}{4})\sin(x) - 2x\cos(x)}{(x^2 - \frac{\pi^2}{4})^2}\,.$$

Den Funktionswert $f'(\frac{\pi}{2})$ erhalten wir wiederum mit der Regel von L'Hospital durch

$$\begin{aligned} f'(\frac{\pi}{2}) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-(x^2 - \frac{\pi^2}{4})\sin(x) - 2x\cos(x)}{(x^2 - \frac{\pi^2}{4})^2} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-(x^2 - \frac{\pi^2}{4} + 2)\cos(x)}{4x(x^2 - \frac{\pi^2}{4})} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(x^2 - \frac{\pi^2}{4} + 2)\sin(x) - 2x\cos(x)}{4(x^2 - \frac{\pi^2}{4}) + 8x^2} = 1/\pi^2\,. \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$g(x) = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{2})\,.$$

(b) Mit $f(0) = -\frac{4}{\pi^2}$, $f(\pi) = -\frac{4}{3}\frac{1}{\pi^2}$ und der Abschätzung

$$\frac{4}{3\pi^2} \leq \frac{4}{27} \leq \frac{1}{4} = \frac{4}{16} \leq \frac{4}{\pi^2}$$

liefer der Zwischenwertsatz die Behauptung.

Lösung zu 4: (a) Mit $a \in (0,1)$ und $\sqrt[n]{n} \to 1,\ n \to \infty$ gibt es $N \geq 0$ und $b \in (0,1)$, sodass $a\sqrt[n]{n} \leq b < 1$ für alle $n \geq N$. Also folgt

$$n\,a^n \leq b^n \to 0,\ n \to \infty\,.$$

Alternativ lässt sich der Grenzwert auch mit der Regel von L'Hospital zeigen durch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{a^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(a)a^{-x}} = 0\,.$$

(b) Wir betrachten den Grenzwert

$$\frac{\frac{1+\mathrm{e}^{-(n+1)x^2}}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n+1}+n+1}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{\frac{n+1}{2}}}{\frac{1+\mathrm{e}^{-nx^2}}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n}+n}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{\frac{n}{2}}} = \frac{1+\mathrm{e}^{-(n+1)x^2}}{1+\mathrm{e}^{-nx^2}}\,\frac{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n}+n}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n+1}+n+1}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{\frac{1}{2}} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{\frac{1}{2}}$$

für $n\to\infty$. Dabei nutzen wir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{-(n+1)x^2}}{1+\mathrm{e}^{-nx^2}} = \begin{cases} \frac{2}{2}=1 & \text{für } x=0 \\ \frac{1}{1}=1 & \text{für } x\neq 0 \end{cases}$$

und mit Teilaufgabe (a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n}+n}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n+1}+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{n} n}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{n}(n+1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.$$

Mit dem Quotientenkriterium erhalten wir Konvergenz der Reihe, wenn

$$\frac{2}{\pi}|x-\frac{\pi}{2}|<1$$

gilt, also im Fall $x\in(0,\pi)$. Ausserdem liefert das Quotientenkriterium Divergenz der Reihe, wenn $x\notin[0,\pi]$ ist.

Im Fall $x=0$ ergibt sich für die Summanden der Reihe

$$\frac{2}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n}+n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{2}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{n} n} \to 2\,, \quad n\to\infty$$

und im Fall $x=\pi$

$$\frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi^2/4}}{(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{n}+n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \to 1\,, \quad n\to\infty\,.$$

In beiden Fällen bilden die Summanden keine Nullfolge. Daher divergiert die Reihe in diesen Fällen und wir erhalten Konvergenz ausschliesslich im Fall $x\in(0,\pi)$.

Lösung zu 5: Mit der Substitution $u=\tan x$ und der Ableitung $\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos^2(x)}$ folgt

$$\int\frac{\cos(\tan(x))}{\cos^2(x)}\mathrm{e}^{-\tan(x)}\,dx = \int\cos(u)\mathrm{e}^{-u}\,du\,.$$

Zweimal partiell Integrieren führt auf

$$\int\cos(u)\mathrm{e}^{-u}\,du = \sin(u)\mathrm{e}^{-u}+\int\sin(u)\mathrm{e}^{-u}\,du = \sin(u)\mathrm{e}^{-u}-\cos(u)\mathrm{e}^{u}-\int\cos(u)\mathrm{e}^{-u}\,du\,.$$

Also erhalten wir nach Rücksubstitution die Stammfunktion

$$\int\frac{\cos(\tan(x))}{\cos^2(x)}\mathrm{e}^{-\tan(x)}\,dx = \frac{1}{2}\big(\sin(\tan(x))-\cos(\tan(x))\big)\mathrm{e}^{-\tan(x)}\,.$$

Aus der Beschränkung $|\sin(\tan(x))-\cos(\tan(x))|\leq 2$ für jedes $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ und $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x)=+\infty$ folgt weiterhin

$$\lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\int_0^a f(x)\,dx = \lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\big(\sin(\tan(x))-\cos(\tan(x))\big)\mathrm{e}^{-\tan(x)}-\frac{1}{2}(\sin(0)-\cos(0))\mathrm{e}^{0}=\frac{1}{2}\,.$$