

**Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik I
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt
vom 2. September 2022**

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Beträge der Lösungen der Gleichung

$$(z+1)^3 = (z-1)^3$$

in $\mathbb{C}$.

Hinweis: Betrachten Sie $w = \frac{z+1}{z-1}$ für $z \neq 1$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie die Abschätzungen

$$-2 \leq \frac{\ln(x^4 + 1) - 2}{x^4 + 1} \leq \frac{1}{e^3} \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$a_n = \sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie Konvergenz der Folge für $n \rightarrow \infty$ und berechnen sie ihren Grenzwert.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (x-1)^n$$

konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Folge (a_n/n) monoton fallend ist.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \ln(1+u) \, du, \quad x > -1,$$

also eine Stammfunktion von $\ln(1+x)$.

(a) Zeigen Sie für die Ableitungen von f die Darstellung

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n-2)!}{(1+x)^{n-1}} \quad \text{für } x > -1 \quad \text{und} \quad n \geq 2.$$

(b) Stellen Sie die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf und zeigen Sie für das Restglied R_n :

$$\text{Wenn } 0 \leq x < 1 \text{ ist, so gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

(c) Zeigen Sie

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)2^n} = 3 \ln \frac{3}{2}.$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(x) = 12 \frac{\cos(2x)}{1 + \sin(2x)} u(x) + 3(1 + \sin(2x))^3 \sin(x) \sqrt[3]{u(x)^2}, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

mit $u(0) = \frac{1}{8}$.

Lösung zu 1: Mit $w = \frac{z+1}{z-1}$ ergibt sich aus der Gleichung die Identität $w^3 = 1$ mit den drei Lösungen (Einheitswurzeln)

$$w_0 = 1, \quad w_1 = e^{i\frac{2}{3}\pi} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

und

$$w_2 = e^{i\frac{4}{3}\pi} = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Der Fall $w = w_0 = 1$ liefert den Widerspruch $z + 1 = z - 1$ und führt auf keine Lösung der Gleichung.

Für die anderen beiden Fälle berechnen wir

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

und weiter

$$|z| = \frac{|(w+1)(\overline{w}-1)|}{|w-1|^2} = \frac{|w|^2 - w + \overline{w} - 1}{|w-1|^2}.$$

Einsetzen der beiden Lösungen w_1 und w_2 mit $|w_1| = |w_2| = 1$ und $\operatorname{Im}(w_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bzw. $\operatorname{Im}(w_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ergibt für die beiden Lösungen

$$|z_{1,2}| = \frac{2|\operatorname{Im}(w_{1,2})|}{|w_{1,2} - 1|^2} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bem.: Direkter Lösungsweg, ohne Substitution: Aus $z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = (z+1)^3 = (z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$ folgt $6z^2 + 2 = 0$ bzw. $z^2 = -\frac{1}{3}$. Also ergeben sich die beiden Lösungen $z_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}i$ mit $|z_{1,2}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lösung zu 2: Der Ausdruck

$$f(x) = \frac{\ln(x^4 + 1) - 2}{x^4 + 1}$$

ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, so dass in lokalen Extremalstellen $f'(x) = 0$ gilt. Wir berechnen

$$f'(x) = \frac{\frac{4x^3}{x^4+1}(x^4+1) - 4x^3(\ln(x^4+1) - 2)}{(x^4+1)^2} = -\frac{4x^3(\ln(x^4+1) - 3)}{(x^4+1)^2}.$$

Aus der Bedingung $f'(x) = 0$ ergeben sich die kritischen Stellen $x_0 = 0$ oder, aus der Gleichung $3 = \ln(x^4 + 1)$, die Stellen $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{e^3 - 1}$ mit den Funktionswerten $f(x_0) = -2$ und $f(x_{1,2}) = \frac{1}{e^3}$.

Weiterhin gilt mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x^4 + 1) - 2}{x^4 + 1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^3}{(x^4 + 1)4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^4 + 1} = 0.$$

Also liegt das globale Minimum der Funktion bei $x = 0$ und globale Maxima bei $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{e^3 - 1}$. Es ergeben sich die Abschätzungen

$$-2 = f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_{1,2}) = \frac{1}{e^3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung zu 3: zu(a): Wir berechnen

$$\begin{aligned} \sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2 &= \frac{n^4 + n^2 + 1 - n^4}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1} + n^2} \\ &= \frac{n^2 + 1}{n^2(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} + 1)} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{n^2(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} + 1)} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wobei die Konvergenz aus den Rechenregeln für Grenzwerte und den Nullfolgen $\frac{1}{n^2}$ und $\frac{1}{n^4}$ folgt.

zu (b): Mit dem Wurzelkriterium ergibt sich der Konvergenzradius $r = 1$ aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{n}} |x - 1|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{n}} |x - 1| \rightarrow |x - 1|,$$

da $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2} - \varepsilon} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \varepsilon} = 1$$

gilt. Somit konvergiert die Reihe für alle $x \in (0, 2)$. Die Reihe divergiert für $x < 0$ und für $x > 2$.

Wir untersuchen noch die Konvergenz an den Stellen $x = 0$ und $x = 2$. Im ersten Fall ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (-1)^n$$

konvergent wegen des Leibnizkriteriums, da (a_n/n) nach dem Hinweis eine positive, monoton fallende Nullfolge ist. Im zweiten Fall ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

divergent, denn es gibt etwa $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{4} \leq a_n$ für alle $n \geq n_0$. Also ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \geq \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{a_n}{n} + \frac{1}{4} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergent, da die harmonische Reihe divergiert.

Lösung zu 4: (a) Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang ist der Fall $n = 2$. Aus der Definition von f folgt

$$f'(x) = \ln(1+x), \quad f''(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^2 0!}{(1+x)^{2-1}}.$$

Dies ist genau die behauptete Formel für $n = 2$.

Für den Induktionsschritt setzen wir als Induktionsvoraussetzung voraus, dass die behauptete Formel für ein $n \geq 2$ richtig ist. Dann folgt für dieses n

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \stackrel{\text{I.V.}}{=} (-1)^n (n-2)! \frac{d}{dx} \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \\ &= (-1)^n (n-2)! \frac{1-n}{(1+x)^n} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+x)^n}. \end{aligned}$$

Dies ist die behauptete Formel für $n+1$.

Es folgt dass die Formel für alle $n \geq 2$ richtig ist.

(b) Die Taylorreihe ist

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(0) + f'(0)x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Nach der Definition von f und Teil (a) ist

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \ln(1) = 0, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n (n-2)!, \quad n \geq 2.$$

Somit ist

$$F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n.$$

Wir betrachten x mit $0 \leq x < 1$. Mit einer Stelle ξ zwischen $x_0 = 0$ und x gilt für das Restglied nach dem Satz von Taylor

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)n(1+\xi)^n}.$$

Mit $0 \leq \xi \leq x < 1$ folgt

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)n|1+\xi|^n} \stackrel{x \leq 1}{\leq} \frac{1}{(n+1)n|1+\xi|^n} \stackrel{\xi \geq 0}{\leq} \frac{1}{(n+1)n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(c) Es ist

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)2^n} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + 2F\left(\frac{1}{2}\right).$$

Da das Restglied gegen null konvergiert, ist $F(x) = f(x)$ für $0 \leq x < 1$, also insbesondere für $x = 1/2$. Den Funktionswert berechnen wir als

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} \ln(1+t) dt = [(1+t) \ln(1+t) - t]_0^{1/2} = \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2}.$$

Somit ist der Reihenwert

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)2^n} = 1 + 2\left(\frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = 3 \ln \frac{3}{2}.$$

Lösung zu 5: Es handelt sich um eine Bernoulli'sche Differentialgleichung mit dem Exponenten $\lambda = 2/3$. Wir substituieren $u(x) = v(x)^\alpha$ mit $\alpha = 1/(1-\lambda) = 3$. Somit ist $u'(x) = 3v(x)^2 v'(x)$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} 3v(x)^2 v'(x) &= 12 \frac{\cos(2x)}{1+\sin(2x)} v(x)^3 + 3(1+\sin(2x))^3 \sin(x) v(x)^2, \\ v'(x) &= 4 \frac{\cos(2x)}{1+\sin(2x)} v(x) + (1+\sin(2x))^3 \sin(x). \end{aligned}$$

Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung kann durch Separation gelöst werden.

$$\int \frac{v'_h(x)}{v_h(x)} dx = 2 \int \frac{2 \cos(2x)}{1+\sin(2x)} dx,$$

$$\begin{aligned} \ln |v_h(x)| &= 2 \ln |1+\sin(2x)| + \tilde{C} = \ln(1+\sin(2x))^2 + \tilde{C}, \\ v_h(x) &= C(1+\sin(2x))^2. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung machen wir den Ansatz $v_p(x) = C(x)(1+\sin(2x))^2$. Dieser führt auf die Gleichung

$$C'(x)(1+\sin(2x))^2 = (1+\sin(2x))^3 \sin(x).$$

Somit gilt (mit einem Additionstheorem für die Sinus-Funktion

$$C'(x) = (1+\sin(2x)) \sin(x) = \sin(x) + 2 \sin^2(x) \cos(x).$$

Eine Stammfunktion ist

$$C(x) = -\cos(x) + \frac{2}{3} \sin^3(x).$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$u(x) = \left(C - \cos(x) + \frac{2}{3} \sin^3(x)\right)^3 (1+\sin(2x))^6.$$

Der Anfangswert liefert noch

$$\frac{1}{8} = u(0) = (C-1)^3, \quad \text{d.h.} \quad C = \frac{3}{2}.$$

Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(x) = \left(\frac{3}{2} - \cos(x) + \frac{2}{3} \sin^3(x)\right)^3 (1+\sin(2x))^6.$$