Karlsruher Institut für Technologie

# Klausur zur Bachelorprüfung
# Höhere Mathematik II
# Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

Karlsruhe, 2. September2024

**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die die folgende Gleichung erfüllen,

$$\big(4\cos^2(z) - 3\big)\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = \mathrm{i}\,.$$

**Aufgabe 2**

Die Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ in $\mathbb{R}$ sind rekursiv gegeben durch $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ und

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + b_n\,, \\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n\,, \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist die Folge $(c_n)$ definiert durch $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

(a) Begründen Sie, warum $(a_n)$ und $(b_n)$ divergieren.

(b) Zeigen Sie die Rekursion $c_{n+1} = \frac{2c_n+1}{c_n+2}$ und die Abschätzungen $0 \le c_n \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Ist die Folge $(c_n)$ konvergent ? Beweisen Sie ihre Antwort. Wenn ja, berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} c_n$.

**Aufgabe 3**

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(2x-2)^{3n+1}\right).$$

**Aufgabe 4**

Berechnen Sie eine Lösung $u : \mathbb{R}_{\ge 1} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$u'(x) + \frac{2u(x)}{x} - \mathrm{e}^x\sqrt{u(x)} = 0$$

mit $u(1) = \frac{1}{4}$.

**Aufgabe 5**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + ax + b\,, & x \le 0\,, \\ (1+x)^{\frac{1}{x}}\,, & x > 0\,, \end{cases}$$

mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $f$ auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist.

(b) Begründen Sie, dass $f$ mit den Parametern $a, b$ aus Teil (a) im Intervall $(-1, 1)$ ein Maximum besitzt (Hinweis: $\mathrm{e} \approx 2.7$).

**Lösung zu 1:** Einsetzen des Kosinus in die Gleichung ergibt

$$4\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2-3=ie^{-2iz}$$

bzw.

$$e^{2iz}+e^{-2iz}-1-ie^{-2iz}=0\,.$$

Setzen wir $u=e^{2iz}$, so ergibt sich die quadratische Gleichung

$$u^2-u+(1-i)=0\,.$$

Quadratische Ergänzung führt auf

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}+i\,.$$

Wir berechnen die Wurzeln der rechten Seite. Mit dem Ansatz $(x+iy)^2=-\frac{3}{4}+i$ ergeben sich aus Real- und Imaginärteil die beiden Gleichungen

$$2xy=1\,,\quad x^2-y^2=-\frac{3}{4}\,.$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite liefert die reelle quadratische Gleichung $y^4-\frac{3}{4}y^2-\frac{1}{4}=0$, und wir berechnen die Lösungen $y^2=1$ oder $y^2=-\frac{1}{4}$. Da $y$ reell ist, kommt nur die erste Lösung in Betracht. Also sind $(x+iy)=\pm(\frac{1}{2}+i)$ die beiden möglichen Wurzeln und wir erhalten

$$u=1+i\quad\text{oder}\quad u=-i\,.$$

Mit $z=a+ib$ ergeben sich somit Lösungen der Gleichung durch

$$e^{-2b}\,(\cos(2a)+i\sin(2a))=e^{2iz}=\begin{cases}-i\\1+i\,.\end{cases}$$

Im ersten Fall ergibt sich $e^{-2b}=|-i|=1$ und $2a=\arg(-i)=\frac{3\pi}{2}+2\pi n$ bzw.

$$b=0\quad\text{und}\quad a=\left(\frac{3}{4}+n\right)\pi\,,\ n\in\mathbb{Z}\,.$$

Im zweiten Fall erhalten wir aus $e^{-2b}=|1+i|=\sqrt{2}$ und $2a=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}+2\pi n$ bzw.

$$b=-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2})=-\frac{1}{4}\ln(2)\quad\text{und}\quad a=\left(\frac{1}{8}+n\right)\pi\,,\ n\in\mathbb{Z}\,.$$

Damit haben wir alle Lösungen der Gleichung

$$z=\left(\frac{3}{4}+n\right)\pi\quad\text{oder}\quad z=\left(\frac{1}{8}+n\right)\pi-\frac{i}{4}\ln(2)$$

mit $n\in\mathbb{Z}$ bestimmt.

**Lösung zu 2:** zu (a) Um Divergenz der Folgen zu sehen lässt sich das Minorantenkriterium nutzen, indem wir induktiv $a_n,b_n\geq 2^{n-1}$ zeigen. Mit $a_1=1$ und $b_1=2$ ist ein Induktionsanfang gegeben. Mit der Induktionsannahme $a_n,b_n\geq 2^{n-1}$ ist durch

$$a_{n+1}=2a_n+b_n\geq 2a_n\geq 2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

und analog für $b_n$ der Induktionsschritt gegeben.

zu (b) Auch diese Aussage zeigen wir induktiv. Mit $c_1=\frac{a_1}{b_1}=\frac{1}{2}\in[0,1]$ ist der Induktionsanfang offensichtlich. Für einen Induktionsschritt berechnen wir die Rekursionsformel

$$c_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{2a_n+b_n}{a_n+2b_n}==\frac{2\frac{a_n}{b_n}+1}{\frac{a_n}{b_n}+2}=\frac{2c_n+1}{c_n+2}\,,$$

wobei $b_n\neq 0$ wegen Teilaufgabe (a) gilt. Machen wir nun die Indutkionsannahme, dass $c_n\in[0,1]$ gilt, so folgt offensichtlich $c_{n+1}>0$ und aus $c_n-1\leq 0$ ergibt sich $2c_n-c_n+1-2\leq 0$ bzw. $2c_n+1\leq c_n+2$. Also ist

$$c_{n+1}=\frac{2c_n+1}{c_n+2}\leq 1\,.$$

Insgesamt erhalten wir durch die Induktion $0\leq c_n\leq 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

*Alternative zur Abschätzung in der Induktion:* Betrachten wir die rationale Funktion mit $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$ auf dem Intervall $[0,1]$, so ergibt sich mit der Ableitung $f'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}>0$, dass $f$ monton steigend ist. Damit folgt $\frac{1}{2}=f(0)\leq f(x)\leq f(1)=1$ und wir erhalten in der obigen Induktion aus $c_n\in[0,1]$ auch $c_{n+1}\in[0,1]$.

zu (c) Mit dem Montoniekriterium ergibt sich Konvergenz der Folge $(c_n)$, wenn wir noch Monotonie zeigen, da die Folge nach Teil (b) beschränkt ist. Die Folge ist monoton steigend, was aus

$$c_{n+1}-c_n=\frac{2c_n-1-c_n(c_n+2)}{c_n+2}=\frac{1-c_n^2}{c_n+2}\geq 0$$

folgt.

Den Grenzwert $c=\lim_{n\to\infty}c_n$ berechnen wir aus der Fixpunktgleichung

$$c=\frac{2c+1}{c+2}\quad\text{bzw.}\quad c(c+2)-(2c+1)=c^2-1=0$$

und erhalten $c=1$, da $c_n\geq 0$ und somit auch $c\geq 0$ gilt.

**Lösung zu 3:** Wir können etwa das Quotientenkriterium nutzen. Betrachten wir

$$\begin{aligned}\frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}\,|2x-2|^{3n+4}}{\frac{n}{n^2+1}\,|2x-2|^{3n+1}}&=\frac{n+1}{n}\,\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}\,|2x-2|^3\\&=(1+\frac{1}{n})\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}\,|2x-2|^3\\&\to 8\,|x-1|^3\,,\quad n\to\infty\,.\end{aligned}$$

Das Quotientenkriterium greift, wenn der letzte Ausdruck kleiner Eins, also wenn $|x-1|<\frac{1}{2}$ gilt. Somit ist der Konvergenzradius $r=\frac{1}{2}$ und die Potenzreihe konvergiert für $x\in(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

Ausserdem ist die Reihe divergent für $x \notin [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Für die Randpunkte $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{3}{2}$ erhalten wir die Reihen

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(-1)^{3n+1}\right) = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}}(-1)^n\right)$$

bzw.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(1)^{3n+1}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

Mit $\frac{1}{n+\frac{1}{n}} \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ für $n > 0$ ergibt sich mit dem Leibnizkriterium Konvergenz im ersten Fall. Im zweiten Fall ist die Reihe divergent, da die divergente harmonische Reihe, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, eine Minorante liefert.

Insgesamt folgt, dass die Reihe für $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ konvergiert und sonst divergiert.

**Lösung zu 4:** Es handelt sich um eine Bernoulli Differentialgleichung. Wir substituieren $v(x) = (u(x))^{\frac{1}{2}}$ und erhalten aus

$$\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u' + \frac{1}{x}u^{\frac{1}{2}} - \frac{e^x}{2} = 0$$

die lineare Differentialgleichung

$$v'(x) + \frac{1}{x}v(x) - \frac{e^x}{2} = 0\,.$$

Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$\frac{v_0'(x)}{v_0(x)} = -\frac{1}{x}\,.$$

Integration dieser separblen DGL ergibt

$$\ln(|v_0(x)|) = -\ln(|x|) + \tilde{c}\,, \quad \text{bzw.} \quad v_0(x) = \frac{c}{x}\,.$$

Für Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung machen wir den Ansatz $v(x) = c(x)\frac{1}{x}$ und erhalten nach Einsetzen in die Gleichung

$$c'(x) = \frac{x\,e^x}{2}\,.$$

Partielle Integration führt auf

$$c(x) = \frac{1}{2}\int x\,e^x\,dx = \frac{1}{2}x\,e^x - \frac{1}{2}\int e^x\,dx = \frac{1}{2}(x-1)e^x + k\,.$$

Also bekommen wir

$$v(x) = \frac{x-1}{2x}e^x + \frac{k}{x}\,.$$

Mit der Anfangsbedingung $u(1) = \frac{1}{4}$ gilt $v(1) = \frac{1}{2}$, und wir erhalten $k = \frac{1}{2}$. Insgesamt ergibt sich die Lösung

$$v(x) = \frac{1}{2}\left((1 - \frac{1}{x})e^x + \frac{1}{x}\right)$$

und somit ist

$$u(x) = \frac{1}{4}\left((1 - \frac{1}{x})e^x + \frac{1}{x}\right)^2.$$

Bem.: Die ebenso möglich Substitution mit $v(x) = -\sqrt{u(x)}$ führt analog auf dieselbe Lösung.

**Lösung zu 5:** Für $x > 0$ und für $x < 0$ bestehen beide Zweige aus Kombinationen stetig differenzierbarer Funktionen, und somit ist die Funktion in Stellen $x \neq 0$ stetig differenzierbar.

Weiterhin gilt

$$\lim_{x\to 0, x>0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0, x>0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e\,;$$

denn mit der Regel von L'Hospital ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

und die exp-Funktion ist stetig. Also gilt $\lim_{x>0, x\to 0} f(x) = e$. Mit $\lim_{x\to 0, x<0}(-2x^2+ax+b) = b$ folgt $b = e$.

Für die Ableitung der Funktion mit $x > 0$ gilt

$$f'(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\left(\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\right)$$

Mit zweimaliger Anwendung der Regel von L'Hospital erhalten wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{(1+x)(2+6x)} = -\frac{1}{2}\,.$$

Also folgt $\lim_{x\to 0, x>0} f'(x) = -\frac{e}{2}$. Auf dem Zweig mit $x < 0$ ist $\lim_{x\to 0, x<0} f'(x) = \lim_{x\to 0} -4x + a = a$. Die Funktion ist somit stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$, wenn wir $a = -\frac{e}{2}$ und $b = e$ setzen.

zu (b) Mit Teilaufgabe (a) ist $f$ auf dem kompakten Intervall $[-1, 1]$ insbesondere stetig. Also besitzt $f$ eine Maximalstelle $x_{\max} \in [-1, 1]$. Da mit $f(-1) = \frac{3}{2}e - 2 < e$, $f(1) = e^{\ln 2} = 2 < e$ und $f(0) = e$ an den Randpunkten $x = -1$ und $x = 1$ kein Maximum der Funktion ist, folgt $x_{\max} \in (-1, 1)$ liegt im Inneren des Intervalls.