Karlsruher Institut für Technologie

Klausur zur Bachelorprüfung
Höhere Mathematik I
Fachrichtungen: biw/ciw/geod/mach/mit/mwt/vt

vom 4. März 2023

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(6-4\mathrm{i})\,\cos(z) = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\sin(z) - 5 + 6\mathrm{i} + (3-2\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\,.$$

Aufgabe 2

Gegeben sind Parameter α, $\beta \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}\right), & x \in \left(-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}\,, \\ \exp\left(-\dfrac{2}{\pi}\right) - \exp\left(\cos(2x)\right), & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right), \\ \alpha\,, & x = 0\,, \\ \beta\,, & x = \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

(a) Begründen Sie, dass f auf $(-\pi, \pi) \setminus \left\{0, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ für jede Wahl von α, β stetig ist.

(b) Kann man α und β so wählen, dass f in den Stellen 0 oder $\dfrac{\pi}{2}$ stetig ist? Geben Sie diese Wahl ggf. an.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(108)} \cdot \ln\left(\dfrac{(x+2)^3}{x-2}\right), & x > 2\,, \\ \mathrm{e}^x\,, & 0 \le x \le 2\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$f(x) \ge 1 \qquad \text{für alle } x \ge 0\,.$$

Aufgabe 4

Die Funktion

$$f(x) = \frac{9}{(x-3)^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}\,,$$

lässt sich auf einem Intervall $(-r, r)$ als Potenzreihe darstellen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n\,, \qquad |x| < r\,.$$

(a) Zeigen Sie: $a_0 = 1$, $a_1 = \dfrac{2}{3}$ und

$$a_{n+2} = \frac{2}{3}\,a_{n+1} - \frac{1}{9}\,a_n\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

sowie die explizite Darstellung $a_n = \dfrac{n+1}{3^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe?

(c) Bestimmen Sie den Wert von $f^{(2023)}(0)$. (Potenzen von 3 und Fakultäten müssen nicht näher berechnet werden.)

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswerproblems

$$u'(x) = \frac{2\,u(x)}{1+2x} + \frac{1}{x^2\,(1+2x)}\,(u(x))^2\,, \qquad x > 0\,,$$

mit $u(1) = \dfrac{1}{2}$.

Lösung zu 1: Wir setzen die Darstellungen der trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion in die Gleichung ein und erhalten

$$(3-2\mathrm{i})\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)=-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)-5+6\mathrm{i}+(3-2\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\,.$$

Der Term $(3-2\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$ hebt sich auf beiden Seiten weg. Wir multiplizieren noch mit $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ durch,

$$(6-4\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1\right)-(10-12\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,.$$

Wir substituieren $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ und bringen alles auf eine Seite,

$$w^3+(6-4\mathrm{i})\,w^2+(9-12\mathrm{i})\,w=0\,.$$

Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen besitzt, kann $w=0$ ausgeschlossen werden. Somit verbleibt eine quadratische Gleichung,

$$w^2+(6-4\mathrm{i})\,w+9-12\mathrm{i}=0\,,$$

die wir durch quadratisches Ergänzen lösen,

$$(w+3-2\mathrm{i})^2=(3-2\mathrm{i})^2-9+12\mathrm{i}=9-12\mathrm{i}-4-9+12\mathrm{i}=-4\,,$$

bzw. $w=-3+2\mathrm{i}\pm 2\mathrm{i}$. Also haben wir die beiden Lösungen, die wir in Polarkoordinaten darstellen:

$$\begin{aligned} w_1&=-3=3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\,,\\ w_2&=-3+4\mathrm{i}=5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arccos(-3/5)}\,. \end{aligned}$$

Damit können wir rücksubstituieren und die Lösungen aus $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ bestimmen:

$$z=-\mathrm{i}\,\ln(3)+(2n+1)\,\pi \quad\text{oder}\quad z=-\mathrm{i}\ln(5)+\arccos(-3/5)+2n\pi\,,\qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Lösung zu 2: (a) Alle auftretenden Funktionen sind stetig und die Nenner haben auf der Menge $(-\pi,\pi)\setminus\left\{0,\frac{\pi}{2}\right\}$ keine Nullstellen. Somit ist f als Komposition stetiger Funktionen selbst stetig.

(b) Wir betrachten zunächst $\hat{x}=0$. Wir untersuchen, ob der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)\right),$$

da die Exponentialfunktion stetig ist. Dazu wenden wir die Regel von L'Hospital an:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\,\sin(x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\,\cos(x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}=0\,.$$

Somit ist f durch die Wahl $\alpha=0$ an der Stelle $\hat{x}=0$ stetig.

Nun betrachten wir $\hat{x}=\pi/2$. Es gilt

$$\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}f(x)=\lim_{x\to\pi/2}\exp\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=\exp\left(1-\frac{2}{\pi}\right).$$

$$\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}}f(x)=\lim_{x\to\pi/2}\left[\exp\left(-\frac{2}{\pi}\right)-\exp\left(\cos(2x)\right)\right]=\exp\left(-\frac{2}{\pi}\right)-\exp\left(-1\right).$$

Diese Grenzwerte sind nicht gleich, denn

$$\exp\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=\mathrm{e}\cdot\exp\left(-\frac{2}{\pi}\right)>\exp\left(-\frac{2}{\pi}\right)>\exp\left(-\frac{2}{\pi}\right)-\frac{1}{\mathrm{e}}=\exp\left(-\frac{2}{\pi}\right)-\exp\left(-1\right).$$

Also ist f in $\hat{x}=\pi/2$ für keine Wahl von β stetig.

Lösung zu 3: Wir betrachten die Intervalle $[0,2]$ und $(2,\infty)$ separat.

Auf $[0,2]$ ist die Funktion streng monoton wachsend und nimmt daher ihren kleinsten Funktionswert am linken Rand an. Dieser ist $f(0)=1$. Somit ist die Ungleichung für alle $x\in[0,2]$ erfüllt.

Auf $(2,\infty)$ betrachten wir zunächst das Verhalten in der Nähe der Intervallgrenzen. Es gilt

$$f(x)=\frac{1}{\ln(108)}\left(3\,\ln(x+2)-\ln(x-2)\right)\longrightarrow\infty\quad(x\to 2)\,,$$

sowie

$$f(x)=\frac{1}{\ln(108)}\left(2\,\ln(x+2)+\ln\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)\longrightarrow\infty\quad(x\to\infty)\,.$$

Somit gibt es Zahlen a, b mit $2<a<b$ und $f(x)\geq 2$ für $x\in(2,\infty)\setminus(a,b)$.

Es reicht also aus, das abgeschlossene, beschränkte Intervall $[a,b]$ zu betrachten. Als stetige Funktion nimmt f hier sein Minimum an. Kandidaten dafür sind die Randpunkte a, b, sowie alle Stellen x mit $f'(x)=0$. Wir bestimmen die Ableitung mit Ketten und Quotientenregel:

$$f'(x)=\frac{1}{\ln(108)}\cdot\frac{x-2}{(x+2)^3}\cdot\frac{3\,(x+2)^2\,(x-2)-(x+2)^3}{(x-2)^2}=\frac{3\,(x-2)-(x+2)}{\ln(108)\,(x-2)\,(x+2)}=\frac{2x-8}{\ln(108)\,(x^2-4)}\,.$$

Die Forderung $f'(x)\overset{!}{=}0$ führt auf $x=4$. Es ist

$$f(4)=\frac{1}{\ln(108)}\cdot\ln\left(\frac{6^3}{2}\right)=1\,.$$

Da $f(a)$, $f(b)\geq 2>1$, muss es sich bei $x=4$ um die Minimalstelle handeln. Es folgt

$$f(x)\geq f(4)=1\quad\text{für alle } x\in[a,b]\,,$$

und damit auch für alle $x\geq 0$.

Lösung zu 4: (a) Aus der Darstellung als Potenzreihe folgt

$$\begin{aligned} 9 = (x-3)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n &= (x^2 - 6x + 9) \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} 6\, a_n\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 9\, a_n\, x^n\,. \end{aligned}$$

Mit Indexverschiebungen ergibt sich

$$\begin{aligned} 9 &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 6\, a_{n-1}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 9\, a_n\, x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 6\, a_{n-1} + 9\, a_n)\, x^n - 6a_0 x + 9a_1 x + 9a_0\,. \end{aligned}$$

Wir führen einen Koeffizientenvergleich durch und erhalten:

$$\begin{aligned} &9 = 9a_0 && \Longrightarrow && a_0 = 1\,, \\ &0 = 9a_1 - 6a_0 = 9a_1 - 6 && \Longrightarrow && a_1 = \frac{2}{3}\,, \\ &0 = a_{n-2} - 6\, a_{n-1} + 9\, a_n && \Longrightarrow && a_n = \frac{2}{3}\, a_{n-1} - \frac{1}{9}\, a_{n-2}\,, \quad n \geq 2\,. \end{aligned}$$

Dies ist die rekursive Darstellung der a_n, die zu zeigen war.

Die Korrektheit der expliziten Darstellung beweisen wir durch vollständige Induktion. Für $n = 0$ gilt $a_0 = 1 = (1+0)/3^0$. Ferner ist für $n = 1$ ebenfalls $a_1 = 2/3 = (1+1)/3^1$. Damit ist der Induktionsanfang erbracht.

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass die Darstellung $a_n = (n+1)/3^n$ fr n und $n+1$ richtig ist. Dann folgt mit der Rekursionsvorschrift

$$a_{n+2} = \frac{2}{3}\, a_{n+1} - \frac{1}{9}\, a_n \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{2}{3}\, \frac{n+2}{3^{n+1}} - \frac{1}{9}\, \frac{n+1}{3^n} = \frac{1}{3^{n+2}}\, (2\,(n+2) - (n+1)) = \frac{n+3}{3^{n+2}}\,.$$

Damit ist auch der Induktionsschritt erbracht.

(b) Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{|x|}{3} = \frac{|x|}{3} \overset{!}{<} 1\,.$$

Die Potenzreihe konvergiert also absolut für $x \in (-3, 3)$ und divergiert für $x \in \mathbb{R} \setminus (-3, 3)$. Es bleibt, die Randpunkte zu untersuchen. Wir erhalten für $x = \pm 3$ die Reihen

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \right) \qquad \text{bzw.} \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, (n+1) \right).$$

In beiden Fällen konvergieren die Reihenglieder nicht gegen null, die Reihen sind also divergent. Somit konvergiert die Potenzreihe nur für $x \in (-3, 3)$.

(c) Da f als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ dargestellt werden kann, stimmt diese Darstellung mit der Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ überein. Somit ist $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. Also folgt

$$f^{(2023)}(0) = 2023! \cdot \frac{2023+1}{3^{2023}} = \frac{2024!}{3^{2023}}\,.$$

Lösung zu 5: Es handelt sich um eine Bernoulli'sche Differentialgleich mit Exponent $\alpha = 2$. Die Substitution $u(x) = v(x)^\lambda$ mit $\lambda = 1/(1-\alpha) = -1$ führt auf

$$-\frac{1}{v(x)^2}\, v'(x) = \frac{2}{1+2x}\, \frac{1}{v(x)} + \frac{1}{x^2\,(1+2x)}\, \frac{1}{v(x)^2}\,,$$

bzw. auf die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$v'(x) = -\frac{2}{1+2x}\, v(x) - \frac{1}{x^2\,(1+2x)}\,, \qquad x > 0\,.$$

Wir lösen zunähst die zugehörige homogene lineare Differentialgleich durch Separation:

$$v_h'(x) = -\frac{2}{1+2x}\, v_h(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{v_h'(x)}{v_h(x)}\, \mathrm{d}x = -\int \frac{2}{1+2x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Wir substituieren links $w = v_h(x)$, rechts $z = 1 + 2x$ und erhalten (beachte $x > 0$, also $z > 1$)

$$\ln|w| = -\ln z + \tilde{C} = \ln \frac{1}{z} + \tilde{C}\,,$$

bzw. nach Anwendung der Exponentialfunktion und Rücksubstitution die allgemeine Lösung

$$v_h(x) = \frac{C}{2x+1}\,, \quad x > 0\,.$$

Wir bestimmen nun eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleich durch den Ansatz $v_p(x) = C(x)/(2x+1)$ (Variation der Konstanten). Die Ableitung ist

$$v_p'(x) = \frac{C'(x)}{2x+1} - \frac{2\,C(x)}{(2x+1)^2}\,.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\frac{C'(x)}{2x+1} - \frac{2\,C(x)}{(2x+1)^2} = -\frac{2\,C(x)}{(1+2x)^2} - \frac{1}{x^2\,(1+2x)}\,,$$

oder

$$C'(x) = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Eine Stammfunktion ist $C(x) = 1/x$, wodurch wir die partikuläre Lösung

$$v_p(x) = \frac{1}{x\,(2x+1)}\,, \quad x > 0\,,$$

der inhomogenen linearen Differentialgleichung gefunden haben. Die allgemeine Lösung ist also

$$v(x) = \frac{1+Cx}{x\,(2x+1)}\,, \quad x > 0\,.$$

Die Anfangsbedingung $u(1) = 1/2$ führt auf $v(1) = 2$. Dies liefert die Gleichung

$$2 = \frac{1+C}{1 \cdot 3}\,, \qquad \text{oder} \quad C = 5\,.$$

Wir führen noch die Rücksubstitution durch und erhalten die Lösung

$$u(x) = \frac{x\,(2x+1)}{1+5x}\,, \qquad x > 0\,,$$

des Anfangswertproblems für die Bernoulli'sche Differentialgleichung.